解答例

STEP III 2014、第 4 問

純粋数学 • 積分の不等式

> **STEP III 2014、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.7 節「**変分法**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/variations.html

鍵となる考え方

I_1 の中の 2 乗を展開して I と比べる。その差はある関数の導関数（derivative）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2 \tan x\right)$ の積分（integral）であり、$y(1) = 0$ かつ $\tan 0 = 0$ であるから 0 になる。I を 2 乗の積分として書き表してしまえば、それが非負であることは明らかである。小問 (ii) でも同じ手法が使える。ただし、$\sec^2$ の項がちょうど a^2y^2 を生み出すように b を選ぶ必要がある。うまくいかなくなりうるのは、$[0,1]$ の内部で $\tan bx$ が発散する場合だけである。

解答

問題の意図どおり、以下では一貫して y が $[0,1]$ 上で連続な導関数をもつと仮定する。

小問 (i)

$0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{2}$ であるから、関数 $\tan x$ は $[0,1]$ 上で連続であり、I_1 は意味をもつ。2 乗を展開すると

$$I_1 = \int_0^1 \left((y')^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x\right) \mathrm{d}x,$$

となるので、

$$\begin{aligned} I - I_1 &= -\int_0^1 \left(y^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x\right) \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left(2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x\right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

である。ここで $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ を用いた。積の微分法（product rule）により $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2 \tan x\right) = 2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x$ であり、これはちょうど被積分関数に一致する。したがって

$$I - I_1 = -\Big[y^2 \tan x\Big]_0^1 = -\left(y(1)^2 \tan 1 - y(0)^2 \tan 0\right) = 0,$$

である。$y(1) = 0$ かつ $\tan 0 = 0$ だからである。よって、求めるとおり $I = I_1$ が成り立つ。

I_1 は正の長さをもつ区間上での 2 乗の積分であるから $I_1 \geq 0$ であり、したがって $I \geq 0$ である。

次に $I = 0$ と仮定する。このとき $I_1 = 0$ であり、被積分関数 $(y' + y \tan x)^2$ は連続かつ非負であるから、$[0, 1]$ 全体で 0 でなければならない（もしある 1 点で正ならば、その近くの小さな区間で正となり、積分が正になってしまう）。よって $0 \leq x \leq 1$ に対して $y' + y \tan x = 0$ である。

> **考えてみよう** どこかで 0 になるかもしれない y で割ることなく、$y' + y \tan x = 0$ を解くにはどうすればよいか？

積分因子（integrating factor）を用いる。$[0, 1]$ 上で $\cos x > 0$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y' \cos x + y \sin x}{\cos^2 x} = \frac{y' + y \tan x}{\cos x} = 0,$$

となり、ある定数 C を用いて $y = C \cos x$ と表される。条件 $y(1) = 0$ から $C \cos 1 = 0$ となり、$\cos 1 \neq 0$ であるから $C = 0$ である。したがって、$I = 0$ となるのは $[0, 1]$ のすべての x に対して $y = 0$ のときに限る。

小問 (ii)

$K = \int_0^1 (y' + ay \tan bx)^2 \, \mathrm{d}x$ とおく。ここで $b > 0$ はこれから選ぶ。展開すると

$$K = \int_0^1 \left((y')^2 + 2ayy' \tan bx + a^2 y^2 \tan^2 bx\right) \mathrm{d}x.$$

現れてほしい導関数は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2 \tan bx\right) = 2ayy' \tan bx + aby^2 \sec^2 bx = 2ayy' \tan bx + aby^2 + aby^2 \tan^2 bx.$$

である。これを K の被積分関数と比べると、$\tan^2$ の項がちょうど一致するのは $ab = a^2$、すなわち $b = a$ のときである。このように選ぶと

$$(y' + ay\tan ax)^2 = (y')^2 - a^2y^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan ax\right),$$

となり、したがって

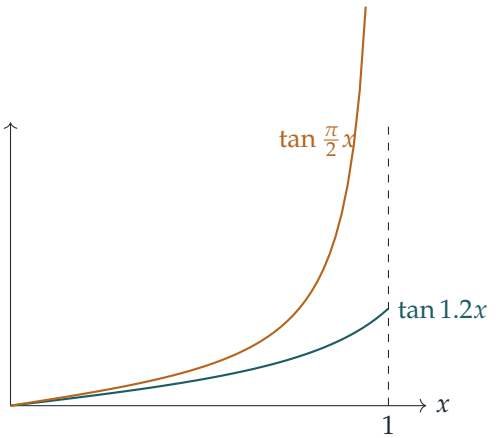
$$K = J + \left[ay^2\tan ax\right]_0^1 = J + a\,y(1)^2\tan a = J,$$

である。$y(1) = 0$ かつ $\tan 0 = 0$ だからである。

この議論では、K が存在し、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）が適用できるように、$\tan ax$ が $[0,1]$ 全体で定義されて連続である必要がある。$a > 0$ であるから ax は $[0,a]$ を動き、tan がそこで連続となるのはちょうど $a < \frac{\pi}{2}$ のときである。よってこの証明は

$$a < k = \frac{\pi}{2}.$$

に対して有効である。このような a に対しては、K は 2 乗の積分であるから $J = K \geq 0$ が成り立つ。（実際、小問 (i) の議論で $\cos x$ を $\cos ax$ に置き換えれば、$J = 0$ ならば $C\cos a = 0$ を満たす $y = C\cos ax$ となり、$y \equiv 0$ が導かれる。したがって、恒等的に 0 ではない y に対しては $J > 0$ さえ成り立つ。）



この図は $k = \frac{\pi}{2}$ となる理由を示している。$a < \frac{\pi}{2}$ のとき重み $\tan ax$ は $[0,1]$ 上で有界にとどまるが、$a = \frac{\pi}{2}$ のときは端点 $x = 1$ に漸近線（asymptote）をもつ。

$a = \frac{\pi}{2}$ の場合

証明がどこを探せばよいかを示唆している。$K = 0$ となるには $y' + ay\tan ax = 0$ が必要であり、その解は $y = C\cos ax$ である。$a < \frac{\pi}{2}$ のときこれらは条件 $y(1) = 0$ を満た

さないが、$a = \frac{\pi}{2}$ のときは満たす。そこで

$$y = \cos\tfrac{\pi x}{2}, \qquad y' = -\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi x}{2},$$

を試す。これは恒等的に o ではなく、$y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ を満たす。このとき

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\tfrac{\pi x}{2} - \cos^2\tfrac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos \pi x \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

よって $a = k$ のとき、$y = \cos\frac{\pi x}{2}$（またはその o でない定数倍）は $J = 0$ を与える。

検算

- 小問 (i) で $y = 1 - x$ とすると $I = \int_0^1 \left(1 - (1-x)^2\right)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$ であり、I_1 を数値計算しても 0.6667 となる。
- $(1 - x)$ に 3 次式を掛けたものを多数ランダムに選び、$(0, \frac{\pi}{2})$ 内の a もランダムに選んでコンピュータで確認したところ、高い精度で $J = K > 0$ が確かめられた。
- 上界 $k = \frac{\pi}{2}$ は最良である。$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ とすると $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right)$ となり、これはすべての $a > \frac{\pi}{2}$ に対して負である（たとえば $a = 2$ のとき $J \approx -0.766$）。

よくある間違い

- $x = 0$ における境界項が o になるのは $\tan 0 = 0$ だからであって、$y(0)$ に関する条件によるのではないことを忘れる。$y(0)$ については何も仮定されていない。
- 理由を述べずに $I_1 = 0$ から $y' + y\tan x = 0$ を結論づける。重要なのは被積分関数の連続性である。
- $\tan bx$ が $[0, 1]$ 上で有限にとどまるかを確かめずに b を選ぶ。条件 $a < \frac{\pi}{2}$ はまさにそこから生じる。

STEP のその先へ

$y(1) = 0$ のときの不等式 $\int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x$ は、ヴィルティンガー（Wirtinger）の不等式（あるいはポアンカレ（Poincaré）の不等式）の一つの形であり、定数 $\frac{\pi^2}{4}$ は $y'(0) = 0$、$y(1) = 0$ のもとでの $-y'' = \lambda y$ の最小固有値（eigenvalue）である。極値を与える関数 $\cos\frac{\pi x}{2}$ はその固有関数（eigenfunction）である。変分法（calculus of variations）において、うまく選んだ導関数を用いて平方完成（completing the square）

するという手法は、停留曲線（stationary path）が本当に最小を与えるかを判定するルジャンドル（Legendre）の判定法やヤコビ（Jacobi）の判定法の背後にある考え方である。この趣旨の問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）を、背景にある固有値問題については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。