解答例

STEP III 2014、第 3 問

純粋数学 • 放物線までの距離

STEP III 2014、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q3

鍵となる考え方

放物線（parabola）上のすべての点は $(at^2, 2at)$ と書けるので、必要な距離はどれも一変数 t の関数となり、どちらの小問でもその関数は二次関数（quadratic）になる（直線の場合は t の、点の場合は t^2 の二次関数である）。二次関数の最小化は平方完成（completing the square）にすぎないが、変数がとりうる範囲には注意しなければならない。t^2 は負になりえず、まさにこの制約が小問 (ii) を場合分けさせるのである。円の場合は労せずして結果が得られる。点から円までの距離は、中心までの距離から半径を引いたものだからである。

解答

小問 (i)

L を $mx - y + c = 0$ と書く。放物線上の点 $P = (at^2, 2at)$ から L までの垂線の距離（perpendicular distance）は次のとおりである。

$$\frac{|mat^2 - 2at + c|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

$f(t) = mat^2 - 2at + c$ とおく。$ma > 0$ であるから、平方完成すると

$$f(t) = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + c - \frac{a}{m} = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mc - a}{m},$$

となるので、f の最小値は $\dfrac{mc - a}{m}$ であり、$t = 1/m$ で達成される。

$mc > a$ の場合。このとき任意の t に対して $f(t) \geq \frac{mc-a}{m} > 0$ であるから、放物線全体は L の一方の側にあり、L と交わることはない。L と放物線の最短距離は、放物線上

の点から L までの距離の最小値、すなわち $|f(t)|/\sqrt{m^2+1} = f(t)/\sqrt{m^2+1}$ の最小値であり、

$$\frac{mc-a}{m\sqrt{m^2+1}},$$

となって、求める結果が得られる。最も近い点は $t = 1/m$ であり、そこでの放物線の接線（tangent）の傾きは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/t = m$ である。つまり接線は L に平行であり、幾何的な直観のとおりである。

$mc \le a$ の場合。このとき $f(1/m) \le 0$ である一方、$t \to \infty$ のとき $f(t) \to +\infty$ となる。f は連続（continuous）であるから、ある t で $f(t) = 0$ となる。よって L は放物線と交わり、最短距離は 0 である。

小問 (ii)：点 $(p,0)$

$C = (p,0)$ から $P = (at^2, 2at)$ までの距離の二乗は次式で与えられる。

$$(at^2-p)^2 + 4a^2t^2.$$

これは $u = t^2$ のみに依存し、u は $[0,\infty)$ のすべての値をとる。よって次を最小化すればよい。

$$g(u) = (au-p)^2 + 4a^2u = a^2u^2 - 2a(p-2a)u + p^2 \qquad (u \ge 0).$$

平方完成すると

$$g(u) = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + p^2 - (p-2a)^2 = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + 4a(p-a).$$

考えてみよう g の制約なしの最小値は $u = (p-2a)/a$ でとられる。この値は常にとれるだろうか？

とれるとは限らない。$u = t^2$ は非負でなければならず、$(p-2a)/a \ge 0$ となるのは $p \ge 2a$ のときに限る。

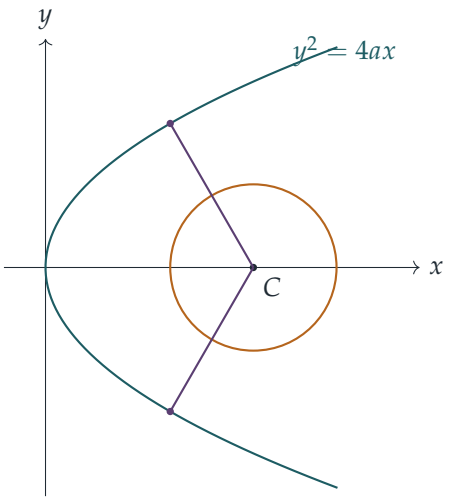
$p/a > 2$ の場合。頂点（vertex）$u = p/a - 2$ は正であるから許され、g の最小値は $4a(p-a)$ である。これは $p > 2a > a$ より正である。最短距離は

$$2\sqrt{a(p-a)},$$

であり、二つの点 $(p-2a,\ \pm 2\sqrt{a(p-2a)})$ で達成される。

$p/a \le 2$ の場合。頂点は $u \le 0$ にあるので、g は $u \ge 0$ で増加し、そこでの最小値は $g(0) = p^2$ である。最短距離は p であり、放物線の頂点 $(0,0)$ で達成される。

二つの答えは $p = 2a$ で一致し、どちらも $2a$ を与える。



図は $a = 1$、$p = 5$ の場合である。放物線上で C に最も近い点（紫）までの距離は $2\sqrt{1 \cdot 4} = 4$ であり、C を中心とする半径 $b = 2$ の円（琥珀色）は放物線から距離 2 だけ離れている。

小問 (ii)：円

d を、いま求めた $C = (p, 0)$ から放物線までの距離とする。すなわち

$$d = \begin{cases} p & \text{条件：} p \leq 2a, \\ 2\sqrt{a(p-a)} & \text{条件：} p > 2a. \end{cases}$$

である。円の中心は C、半径は b である。

$d > b$ **の場合**。放物線上の任意の点 P と円上の任意の点 Q をとる。三角不等式（triangle inequality）より

$$|PQ| \geq |PC| - |CQ| = |PC| - b \geq d - b > 0.$$

等号は、P が放物線上で C に最も近い点であり、Q が線分 CP と円の交点であるときに成り立つ（$|CP| = d > b$ であるから、線分は実際に円と交わる）。よって最短距離は $d - b$ である。

$d \leq b$ **の場合**。P が放物線上を動くとき、$|PC|$ は最小値 $d \leq b$ からいくらでも大きな値まで連続的に変化するので、どこかで $|PC| = b$ となる。その点は両方の曲線上にあり、最短距離は 0 である。

以上をまとめると、円と放物線の最短距離は次のとおりである。

$$\begin{cases} p-b & \text{条件：} p \le 2a \text{ かつ} b < p, \\ 2\sqrt{a(p-a)}-b & \text{条件：} p > 2a \text{ かつ} b < 2\sqrt{a(p-a)}, \\ 0 & \text{それ以外（すなわち} b \ge d \text{ のとき）.} \end{cases}$$

検算

- $m=1, c=2, a=1$ とすると $mc=2>a$ である。公式は $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$ を与える。直接計算すると、$t=1$ の点は $(1,2)$ であり、$x-y+2=0$ までの距離は $|1-2+2|/\sqrt{2}=1/\sqrt{2}$ である。代わりに $c=\frac{1}{2}$ とすると（このとき $mc<a$）、直線 $y=x+\frac{1}{2}$ は $y^2=4x$ と $x^2-3x+\frac{1}{4}=0$ を満たす点で交わり、この方程式は実数解をもつので、距離が 0 であることが確かめられる。
- $a=1, p=5$ のとき、点 $(3,\pm 2\sqrt{3})$ と $(5,0)$ の距離は $\sqrt{4+12}=4=2\sqrt{1\cdot 4}$ であり、コンピュータで放物線上を探索しても、これより近い点は見つからなかった。
- $p \to 0$ のとき距離 $p \to 0$ となるが、$(0,0)$ は放物線上にあるので、これは正しい。p が大きいとき $2\sqrt{a(p-a)}<p$ となるが、頂点までの距離が p であるから、そうでなければならない。
- すべての結果は、m、c、a、p、b の数百通りのランダムな選び方に対するコンピュータ探索で確認した。

よくある間違い

- 距離の二乗の t に関する導関数（derivative）をゼロとおいて根 $t=0$ を見落とす、あるいは $p<2a$ のとき $t^2=p/a-2$ が解をもたないことを忘れる。この場合分けこそが小問 (ii) の核心である。
- $mc<a$ のときに $(mc-a)/(m\sqrt{m^2+1})$ と答えてしまう。これは負であり、実際には直線は放物線と交わっている。
- 円について、符号を確かめずに $d-b$ と書いてしまう。$b \ge d$ のときは曲線どうしが交わり、答えは 0 である。

STEP のその先へ

小問 (ii) の最も近い点は CP が放物線の法線（normal）となる点であり、$p=2a$ での切り替わりは偶然ではない。$(2a,0)$ は放物線の頂点における曲率中心（centre of

curvature）なのである。軸上でそれより先にある点に対しては、軸から外れた最も近い点が二つあり、このような切り替わりの点の軌跡である縮閉線（evolute）は、曲線の微分幾何学（differential geometry）における古典的な対象である。制限された範囲で関数を最小化する問題では、答えが停留点（stationary point）ではなく境界に現れることがあり、これは制約付き最適化（constrained optimisation）の出発点である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。