解答例

STEP III 2014、第 2 問

純粋数学 ・ 双曲線関数による積分

STEP III 2014、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q2

鍵となる考え方

どちらの被積関数（integrand）も分母に $\cosh 2x$ をもち、倍角公式（double-angle formula）は $\cosh^2 x$ を用いても $\sinh^2 x$ を用いても表せる。分子に合うほうの形を選べば、それぞれの積分は標準的な有理式の積分になる。最後の小問では、指数関数に戻るのがこつである。$u = \mathrm{e}^x$ とおくと、どちらの被積関数も分母に $1 + u^4$ をもつ u の有理関数（rational function）となり、それらを適切に組み合わせるとちょうど $1/(1+u^4)$ が得られる。

解答

小問 (i)

$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ を用いる。$u = \cosh x$ とおくと $\mathrm{d}u = \sinh x \,\mathrm{d}x$ であるから、

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1}.$$

分母は $(\sqrt{2}u - 1)(\sqrt{2}u + 1)$ と因数分解でき、二つの因数の差は 2 であるから、

$$\frac{1}{2u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}u - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}u + 1}\right).$$

各項を積分すると対数になり、u の係数から因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ が出る：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2-1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\sqrt{2}u - 1| - \ln|\sqrt{2}u + 1|\Big) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cosh x - 1}{\sqrt{2}\cosh x + 1}\right| + C,\end{aligned}$$

これが求める結果である。（実際には $\cosh x \geq 1$ より $\sqrt{2}\cosh x - 1 > 0$ となるので、実数 x に対しては絶対値記号は不要である。）

小問 (ii)

今度は分子が $\cosh x$ であり、これは $\sinh x$ の導関数であるから、同様の置換（substitution）は $u = \sinh x$、$\mathrm{d}u = \cosh x\,\mathrm{d}x$ である。$\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$ と書くと、

$$\int \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\,u) + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) + C,$$

ここで $a = \sqrt{2}$ として $\int \mathrm{d}u/(1+a^2u^2) = \frac{1}{a}\arctan(au)$ を用いた。

小問 (iii)

一見すると、$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ のどこにも cosh は現れない。

> **考えてみよう** すべてを $u = \mathrm{e}^x$ で書き表すと、$\cosh x/\cosh 2x$ はどのような形になるか？

$\cosh x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$、$\cosh 2x = \frac{1}{2}(u^2 + u^{-2})$ であるから、分母と分子に u^2 を掛けると

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x} = \frac{u + u^{-1}}{u^2 + u^{-2}} = \frac{u(u^2+1)}{u^4+1}, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x} = \frac{u(u^2-1)}{u^4+1}.$$

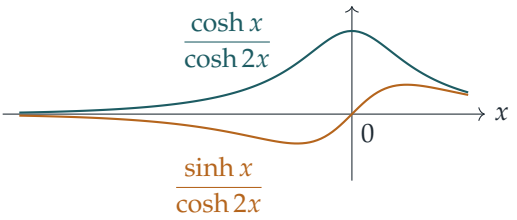
また $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ であるから、余分な因子 u は約分される：

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{u^2-1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

第 1 式から第 2 式を引くと $\dfrac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$ が残る。最後に、u が 0 から 1 まで動くとき、$x = \ln u$ は $-\infty$ から 0 まで動く。したがって

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x.$$

$x \to -\infty$ のときどちらの被積関数も $O(\mathrm{e}^x)$ であるから、右辺の二つの積分はいずれも収束（converge）する。（左辺は通常の積分であるから、これは実際には単なる変数変換であり、無限の端は $u \to 0$ から生じている。）



cosh の積分。小問 (ii) より、$x \to -\infty$ のとき $\sinh x \to -\infty$ であり、したがって $\arctan(\sqrt{2}\sinh x) \to -\frac{\pi}{2}$ である。よって

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan 0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

sinh の積分。小問 (i) より、$x \to -\infty$ のとき $\cosh x \to \infty$ であるから、対数の中の分数は 1 に、対数は 0 に近づく。$x = 0$ では $\cosh 0 = 1$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

有理化すると $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$ であり、また $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ であるから、

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1).$$

これは負であり、そうなるべきである。$x < 0$ では $\sinh x < 0$ だからである（琥珀色の曲線を参照）。

まとめると。

$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1)\right) = \frac{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}},$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- (i) と (ii) の答えを微分して、被積関数に戻ることを確かめる。(ii) については $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) = \dfrac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}$ である。
- 最終的な値は ≈ 0.86697 であり、シンプソンの公式（Simpson's rule）による $\int_0^1 \mathrm{d}u/(1+u^4)$ の数値計算と一致する。この値は $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$（より小さい関数 $1/(1+u^2)$ の積分）と 1 の間にあり、妥当である。
- これとは別に、二つの無限区間の積分も数値的に確認した：$\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.1107$ および $-\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2} \approx -0.6232$。

よくある間違い

- 小問 (ii) でも $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ を使ってしまうこと。$u = \sinh x$ とおくときは $\sinh^2$ の形 $1 + 2\sinh^2 x$ が必要である。

- $u = \mathrm{e}^x$ のとき $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ となることを忘れること。分子に残る余分な u を約分するのは、まさにこの因子である。
- 積分区間を誤ること。$u \in [0,1]$ に対応するのは $x \in (-\infty, 0]$ であり、$[0,1]$ ではない。

STEP のその先へ

$1 + u^4 = (u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)$ であるから、同じ積分は部分分数（partial fractions）分解によって直接計算することもできる。$\frac{1+u^2}{1+u^4}$ と $\frac{1-u^2}{1+u^4}$ を組み合わせる方法は、その代数計算の大部分を省ける巧妙な近道である。大学では、$\int_0^\infty \mathrm{d}u/(1+u^4) = \pi/(2\sqrt{2})$ のような積分は周回積分（contour integration）と留数定理（residue theorem）によって一行で求められ、広義積分（improper integral）は解析学（analysis）において完全な厳密さをもって扱われる。複素解析の側面を見るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）が素晴らしい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。