解答例

STEP III 2014、第 12 問

確率・統計 ・ 対数正規分布

STEP III 2014、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q12

鍵となる考え方

$y = \mathrm{e}^x$ は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、Y に関する命題は対数をとるだけで X に関する命題に書き換えられる。すなわち、$Y \leq y$ となるのは $X \leq \ln y$ のときであり、かつそのときに限る。これにより、Y の中央値（median）と密度関数がただちに得られる。平均（mean）については、指数部分を平方完成（completing the square）して、被積分関数を別の正規分布（normal distribution）の密度関数にするのが要点である。その積分が 1 であることはすでにわかっている。

解答

小問 (i)

e^x は狭義単調増加であるから、事象 $\{Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\}$ と $\{X \leq x_m\}$ は同じ事象である。したがって

$$\mathrm{P}(Y \leq \mathrm{e}^{x_m}) = \mathrm{P}(X \leq x_m) = \tfrac{1}{2},$$

となるから、Y の中央値は

$$y_m = \mathrm{e}^{x_m}.$$

である。（中央値はこのように任意の増加関数で移り合うが、平均はそうではない。このことは小問 (iv) で示される。）

小問 (ii)

Y は正の値のみをとる。$y > 0$ に対して、G を Y の累積分布関数（cumulative distribution function）とする。先と同じ同値関係を用いると

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \ln y) = F(\ln y).$$

合成関数の微分法（chain rule）により微分し、$F' = f$ を用いると

$$g(y) = G'(y) = f(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{f(\ln y)}{y}, \qquad y > 0,$$

となり、求める式が得られる（また $y \leq 0$ では $g(y) = 0$ である）。

最頻値（mode）λ は g が最大値をとる点である。これは g が微分可能な開区間 $(0, \infty)$ に含まれるから、$g'(\lambda) = 0$ である。商の微分法（quotient rule）により

$$g'(y) = \frac{f'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \cdot y - f(\ln y)}{y^2} = \frac{f'(\ln y) - f(\ln y)}{y^2}.$$

$y^2 \neq 0$ であるから、$g'(\lambda) = 0$ とおくと

$$f'(\ln \lambda) = f(\ln \lambda),$$

が得られ、これが求める条件である。

小問 (iii)

関数

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}$$

は、ちょうど $\mathrm{N}(\mu + \sigma^2, \sigma^2)$ に従う確率変数の確率密度関数（probability density function）である。実際、これは与えられた正規分布の密度関数において μ を $\mu + \sigma^2$ に置き換えたものである。どのような確率密度関数も実数全体で積分すると 1 になるので、与えられた積分の値はこれで説明がつく。

さて、

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, \mathrm{d}x.$$

まとめた指数部分を平方完成する。$(x - \mu - \sigma^2)^2 = (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4$ と展開すると

$$\begin{aligned} x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

を得る。定数 $e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ は積分の外に出せるので

$$\mathrm{E}(Y) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}\, dx = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

となる。ここで上で説明した積分を用いた。これが求める結果である。

小問 (iv)

3 つの量をすべて具体的に求める。

中央値。 正規分布の密度関数は μ に関して対称であるから $x_m = \mu$ であり、小問 (i) より $y_m = e^{\mu}$ である。

最頻値。 正規分布の密度関数を微分すると

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x).$$

> **考えてみよう** f が決して 0 にならないとき、小問 (ii) の条件をどのように使えばよいか？

すべての x に対して $f(x) > 0$ であるから、条件 $f'(\ln\lambda) = f(\ln\lambda)$ の両辺を $f(\ln\lambda)$ で割ることができ、

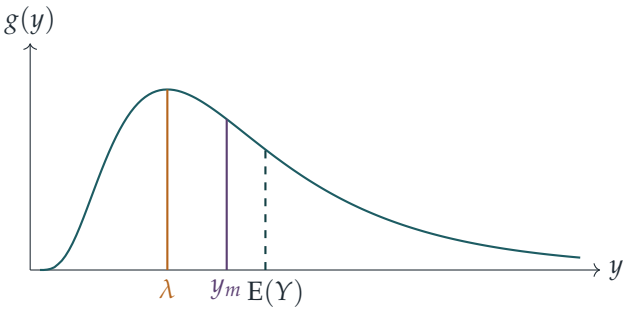
$$-\frac{\ln\lambda - \mu}{\sigma^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln\lambda = \mu - \sigma^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = e^{\mu-\sigma^2}.$$

を得る。これは g の唯一の停留点（stationary point）であり、Y の最頻値はただ 1 つであると与えられているので、これが最頻値である。

比較。 $\sigma > 0$ より $\mu - \sigma^2 < \mu < \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ であり、e^t は狭義単調増加であるから

$$\lambda = e^{\mu-\sigma^2} \ < \ y_m = e^{\mu} \ < \ \mathrm{E}(Y) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

となり、求める不等式が得られる。不等号が厳密であることは $\sigma^2 > 0$ に基づいており、これは本来の意味での正規分布であれば必ず成り立つ。



図は $\mu = 0$、$\sigma = 0.6$ のときの Y の密度関数を示している。右側に長く伸びた裾が平均を最も右へ引っ張り、中央値はその中間に位置し、山の頂点は両者よりも左にある。

検算

- $\sigma \to 0$ のとき、Y は e^{μ} に集中し、3 つの値はいずれも e^{μ} に近づく。これは当然そうあるべき結果である。
- $\mu = 0$、$\sigma = 1$ のとき、$\lambda = e^{-1} \approx 0.368$、$y_m = 1$、$\mathrm{E}(Y) = e^{1/2} \approx 1.649$ である。$e^x f(x)$ の数値積分と g の最大値の数値探索はこれらの値と一致する。
- 比 $\mathrm{E}(Y)/\lambda = e^{3\sigma^2/2}$ は σ のみに依存する。これは納得できる。μ を変えることは Y を e^{μ} 倍に拡大・縮小するにすぎないからである。

よくある間違い

- 合成関数の微分法から生じる因子 $1/y$ を忘れて、Y の密度関数を $f(\ln y)$ と書いてしまう。この因子がないと、最頻値が中央値と同じ e^{μ} になってしまう。
- $\mathrm{E}(e^X) = e^{\mathrm{E}(X)}$ と思い込む。これは中央値については正しいが、平均については正しくない。
- 平方完成での符号の誤り。$(x - \mu - \sigma^2)^2$ を丁寧に展開し、残る定数を確認すること。

STEP のその先へ

ここでの Y は**対数正規分布**（lognormal distribution）に従い、この分布は所得、株価、粒子の大きさのモデル化に用いられる。不等式 $\mathrm{E}(e^X) \geq e^{\mathrm{E}(X)}$ は凸関数（convex function）に関するイェンセンの不等式（Jensen's inequality）の特別な場合であり、小問 (iii) の計算は正規分布の積率母関数（moment generating function）$\mathrm{E}(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ を $t = 1$ で評価したものである。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、確率変数の変換、積率母関数、対数正規分布を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。