解答例

# STEP III 2014、第 11 問

力学 ・ 円運動

**STEP III 2014、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q11

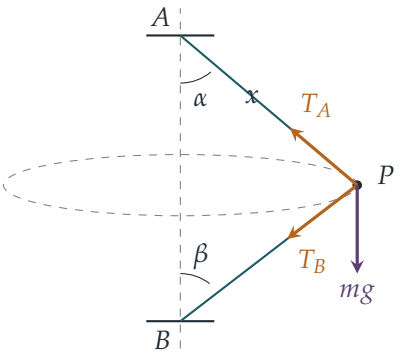
## 鍵となる考え方

質点には 3 つの力（2 本の糸の張力（tension）と重力）がはたらき、それらの合力が円運動に必要な向心力（centripetal force）をちょうど与えなければならない。鉛直方向と水平方向に分解すると、2 つの張力についての 2 本の連立 1 次方程式が得られる。糸は引くことしかできないので $T_B \geq 0$ であり、ここから不等式が導かれる。境界の場合には下側の糸がたるみかけ、三角形 $ABP$ に余弦定理（cosine rule）を用いると、どのような角 $\alpha$ が起こりうるかがわかる。

## 解答

### 設定

$P$ を質点とし、糸は軽くて伸び縮みしないものとみなす。$P$ は直線 $AB$ 上に中心をもつ半径 $r = x\sin\alpha$ の水平な円周上を運動するので、その加速度は軸に向かう水平方向に $\omega^2 x\sin\alpha$ である。張力 $T_A$ は $PA$ に沿ってはたらき、鉛直上向きと角 $\alpha$ をなす。張力 $T_B$ は $PB$ に沿ってはたらき、鉛直下向きと角 $\beta$ をなす。




## 張力

鉛直方向（鉛直方向の加速度はない）と、軸に向かう水平方向に分解すると、

$$T_A \cos\alpha - T_B \cos\beta = mg, \tag{1}$$

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = m\omega^2 x \sin\alpha. \tag{2}$$

これらの式は $\beta$ が鈍角の場合、すなわち $P$ が $B$ より下にある場合にも成り立つ。そのときは $\cos\beta < 0$ となり、$T_B$ の鉛直成分は本来そうあるべきとおり上向きになるからである。

$T_B$ を消去するには、(1) に $\sin\beta$ を、(2) に $\cos\beta$ を掛けて加える。$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$ を用いると、

$$T_A = \frac{m\left(g\sin\beta + \omega^2 x \sin\alpha\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$T_A$ を消去するには、(2) に $\cos\alpha$ を、(1) に $\sin\alpha$ を掛けて引く：

$$T_B = \frac{m\sin\alpha\left(\omega^2 x\cos\alpha - g\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

ここで $\alpha$ と $\beta$ は三角形 $ABP$ の 2 つの内角なので、$0 < \alpha+\beta < \pi$ であり $\sin(\alpha+\beta) > 0$ である。また $\sin\alpha > 0$ である。張っている糸では $T_B \geq 0$ なので、

$$\omega^2 x\cos\alpha \geq g,$$

となり、示すべき式が得られた。

### $\omega^2 x\cos\alpha = g$ の場合

このとき $T_B = 0$ であり、下側の糸はちょうど張っているが張力ははたらいていない。すると (1) から

$$T_A = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

が得られ、これは (2) と矛盾しない。(2) からはこの場合 $T_A = m\omega^2 x$ となるからである。また $\cos\alpha = g/(\omega^2 x) > 0$ なので、$\alpha$ は鋭角であることにも注意しておく。

**考えてみよう** $h$、$d$、$\alpha$ だけを含む不等式は、どこから出てくるのだろうか？

それは力学ではなく幾何から出てくる。三角形 $ABP$ の頂点 $A$ において余弦定理を用いると、

$$d^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - (2h\cos\alpha)\,x + (h^2 - d^2) = 0.$$

長さ $x$ はこの 2 次方程式の実数解なので、判別式（discriminant）は 0 以上である：

$$4h^2\cos^2\alpha - 4(h^2 - d^2) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h^2\cos^2\alpha \geq h^2 - d^2.$$

$h\cos\alpha$ と $\sqrt{h^2 - d^2}$ はともに正である（$\alpha$ は鋭角で $h > d$ だから）ので、両辺の平方根をとって

$$h\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}.$$

を得る。

### $T_A$ の範囲

質点は実際に軸上にはないので、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $0 < \cos\alpha < 1$ である。したがって $T_A = mg/\cos\alpha > mg$ である。もう一方の評価については、直前の結果から $\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}/h$ なので、

$$mg < T_A = \frac{mg}{\cos\alpha} \leq \frac{mgh}{\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

### 上界が達成されるとき

等号が成り立つには $h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}$ が必要であり、このとき判別式は 0 で、2 次方程式は重解（repeated root）

$$x = h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}.$$

をもつ。すると $x^2 + d^2 = h^2$、すなわち $AP^2 + BP^2 = AB^2$ である。三平方の定理の逆（converse of Pythagoras）により、角 $APB$ は直角である。つまり 2 本の糸は垂直であり、$P$ は $AB$ を直径とする円周上にある。同じことだが、$AP$ は $B$ を中心とする半径 $d$ の円に接しており、だからこそこの位置で $\alpha$ が最大になる。この位置では $\sin\alpha = d/h$ であり、$P$ は $B$ より高さ $d^2/h$ だけ上にある。不等式で許されるそれ以外の鋭角 $\alpha$ に対しては、三角形が 2 通り（$x$ の値が 2 つ）存在し、それらがこの位置で一つに合わさる。

## 検算

- $\omega$ が非常に大きいとき、$T_B \approx m\omega^2 x \sin\alpha / \sin(\alpha+\beta)$ は $\omega^2$ に比例して大きくなる。このとき 2 本の糸がともに大きな向心力を与えなければならないからである。
- 極端な位置で $h = 3$、$d = 2$ とすると、$\cos\alpha = \sqrt{5}/3$、$x = \sqrt{5}$ であり、$x^2 + d^2 = 5 + 4 = 9 = h^2$ となる。このとき $T_A/(mg) = 3/\sqrt{5} \approx 1.342$ で、これは $h/\sqrt{h^2 - d^2}$ に等しい。
- $T_A$ と $T_B$ の式をベクトル形式の運動方程式に代入し直すと、コンピュータで調べた多数のランダムな配置において残差は 0 になる。

## よくある間違い

- 円の半径を $x\sin\alpha$ ではなく $x$ としてしまう。
- $T_B$ の鉛直方向の向きを逆にしてしまう。$\beta$ を $BA$ から測ると、（$\beta$ が鋭角のとき）糸 $PB$ は $P$ を下向きに引く。
- 両辺が正であることを確かめずに、不等式を 2 乗したり平方根をとったりしてしまう。

## STEP のその先へ

境界の場合 $T_B = 0$ は、拘束が**非活性**（inactive）になる場合である。糸は片側拘束（one-sided constraint）であり、引くことはできるが押すことはできない。このような不等式拘束をもつ問題は、力学や最適化において符号条件つきのラグランジュ乗数（Lagrange multipliers）につながる。円錐振り子（conical pendulum）とその仲間については、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）でよく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。