解答例

STEP III 2014、第 10 問

力学 ・ 連成振動

> **STEP III 2014、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.2 節「**基準振動**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/normal-modes.html

鍵となる考え方

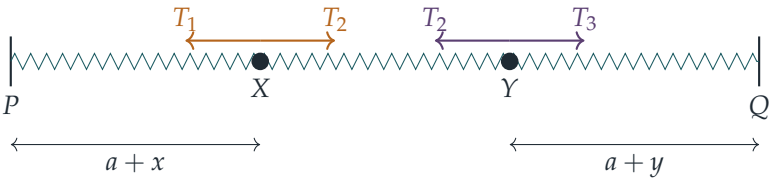
すべてを一直線上に置いて座標を一つだけ用い、各ばねの伸び（extension）を x と y で表せば、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から連立した二つの方程式が得られる。このような対称性をもつ連立方程式（coupled equations）は、足したり引いたりすると分離する。$x-y$ と $x+y$ はそれぞれ独自の単振動（simple harmonic motion）の方程式に従い、その振動数は異なる。そうすると、Y がいつか元の位置に戻るかどうかは、二つの振動数の比が有理数（rational）であるかどうかで決まる。

解答

運動方程式

X と Y を質点とし、ばねは質量が無視でき、フックの法則（Hooke's law）に従うものとしてモデル化する。台は滑らかなので、水平方向にはたらく力はばねの張力だけである。すべての力は直線 PQ に沿ってはたらき、運動もこの直線上にとどまる。

位置は直線に沿って P から Q の向きに測る。すると P は 0、Q は $3a$ の位置にある。このとき X は $a+x$ の位置にあり、Y は $3a-(a+y)=2a-y$ の位置にある。



三つのばねの長さと張力は次のとおりである（フックの法則より、張力 $=\lambda\times$ 伸び$/a$ であり、負の値は押す力を表す）。

$$PX:\ \text{長さ}a+x, \qquad T_1=\frac{\lambda x}{a},$$

$$XY:\ \text{長さ}(2a-y)-(a+x)=a-x-y, \qquad T_2=-\frac{\lambda(x+y)}{a},$$

$$YQ:\ \text{長さ}a+y, \qquad T_3=\frac{\lambda y}{a}.$$

張力のはたらいているばねは、両端をそれぞれ他方の端の方へ引く。よって X は P の向きに T_1 を、Y の向きに T_2 を受ける。$P\to Q$ の向きを正とすると、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-T_1+T_2=-\frac{\lambda}{a}x-\frac{\lambda}{a}(x+y)=-\frac{\lambda}{a}(2x+y),$$

となり、示すべき式が得られた。（符号は自動的に正しく扱われる。$T_2<0$ ならばばね XY は縮んでおり、X を P の方へ押す。）

Y の位置は $2a-y$ なので、正の向きの加速度は $-\ddot{y}$ である。また、X の向き（負の向き）に T_2 を、Q の向き（正の向き）に T_3 を受ける。

$$-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-T_2+T_3=\frac{\lambda}{a}(x+y)+\frac{\lambda}{a}y, \qquad \text{よって} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\lambda}{a}(x+2y).$$

これは第 1 式で x と y を入れ替えたものであり、配置の対称性（PQ の中点に関する折り返し）から当然そうなるはずである。

組み合わせ $x-y$

二つの式を引くと、

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y)=-\frac{\lambda}{a}\left[(2x+y)-(x+2y)\right]=-\frac{\lambda}{a}(x-y).$$

$\omega^2=\lambda/(ma)$ とおくと、これは $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y)=-\omega^2(x-y)$ となり、単振動であるから、

$$x-y=A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

最初は $XP=a$、$YQ=\frac{1}{2}a$ であるから、$x=0$、$y=-\frac{1}{2}a$（$t=0$ において）となり、$x-y=\frac{1}{2}a$、したがって $A=\frac{1}{2}a$ である。質点は静止状態から放されるので、$\dot{x}=\dot{y}=0$（$t=0$ において）である。微分すると $\omega B=0$ となるので $B=0$ である。よって

$$x-y=\tfrac{1}{2}a\cos\omega t.$$

組み合わせ $x+y$

今度は二つの式を足すと、

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(3x+3y), \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -3\omega^2(x+y).$$

これは角振動数（angular frequency）$\sqrt{3}\,\omega$ の単振動であるから、$x+y = C\cos\sqrt{3}\,\omega t + D\sin\sqrt{3}\,\omega t$ となる。$t=0$ において $x+y = -\frac{1}{2}a$ であり、その導関数は 0 であるから、$C = -\frac{1}{2}a$、$D=0$ となる。

$$x+y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

Y は決して戻らない

二つの結果の差の半分をとると、

$$y = \tfrac{1}{2}\big[(x+y)-(x-y)\big] = -\tfrac{1}{4}a\big(\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t\big).$$

（同様に $x = \frac{1}{4}a(\cos\omega t - \cos\sqrt{3}\,\omega t)$ である。）Y が初期位置に戻るのは、ちょうど $y = -\frac{1}{2}a$ となるとき、すなわち

$$\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t = 2.$$

となるときであり、そのときに限る。

> **考えてみよう** どちらの余弦も周期的なのだから、いつかは必ず再びそろうのではないか？

それぞれの余弦は 1 以下なので、和が 2 に等しくなるのは、同じ時刻 $t>0$ において両方が 1 に等しくなるときに限る。そのためには

$$\omega t = 2\pi n \quad \text{かつ} \quad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi k$$

となる整数 n,k が必要であり、$t>0$ より $n \geq 1$ である。辺々割ると $\sqrt{3} = k/n$ が有理数となってしまうが、そうではない。したがってそのような $t>0$ は存在せず、Y は初期位置に決して戻らない。二つの周期 $2\pi/\omega$ と $2\pi/(\sqrt{3}\,\omega)$ は通約不可能（incommensurable）なので、二つの振動が再び足並みをそろえることはない。ただし、いくらでもそれに近い状態にはなる。

検算

- $t=0$ において、公式は $x = \frac{1}{4}a(1-1) = 0$、$y = -\frac{1}{4}a(1+1) = -\frac{1}{2}a$ を与え、初期位置と一致する。また、そこで二つの導関数はともに零となる。

- ばね XY の長さは $a - x - y = a + \frac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t$ であり、常に $\frac{1}{2}a$ と $\frac{3}{2}a$ の間にあるので、質点どうしが衝突することはない。同様に $PX = a + x \geq \frac{1}{2}a$、$YQ = a + y \geq \frac{1}{2}a$ である。モデルは全体を通して物理的に妥当である。
- $m = a = 1$、$\lambda = 2$ として運動を数値的に追跡すると、x と y の公式が 10^{-10} より良い精度で $t = 20$ まで再現される。$0 < \omega t \leq 20\,000$ の範囲をコンピュータで探索すると、$\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t$ は 1.999995 まで 2 に近づくが、決して到達しない。

よくある間違い

- Y の方程式の符号を間違える。y は Q から測っているので、y が増加すると Y は**負の**向きに動く。
- XY の長さを $a - x - y$ ではなく $a + x + y$ と書いてしまう。x と y のどちらが増加しても、中央のばねは短くなる。
- 二つの周期が異なることだけを論じる。周期が異なるだけでは不十分である（周期 1 と 2 は $t = 2$ で再びそろう）。重要なのは、それらの比 $\sqrt{3}$ が無理数であるという点である。

STEP のその先へ

組み合わせ $x - y$ と $x + y$ はこの系の**基準振動**（normal modes）である。すなわち、行列（matrix）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル（eigenvectors）であり、固有値（eigenvalues）1 と 3 が振動数の 2 乗 ω^2 と $3\omega^2$ を与える。連成系の微小振動はすべてこのように基準振動に分解され、運動が周期的になるのは振動数の比がすべて有理数のときに限る。そうでなければ運動は準周期的（quasi-periodic）であり、決して繰り返すことはないが、出発点にいくらでも近いところへ戻ってくる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は連成振動子（coupled oscillators）を扱っており、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はその背後にある固有ベクトルの方法を解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。