解答例

STEP III 2014、第 1 問

純粋数学 • 対数関数の級数展開

> **STEP III 2014、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q1

鍵となる考え方

3 次式（cubic）$1+qx^2+rx^3$ は $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$ と因数分解（factorise）できるので、その対数（logarithm）は 3 つの対数に分かれ、それぞれの級数（series）展開はすでに知っている。これにより、x^n の係数（coefficient）が a、b、c で表される。一方、同じ対数を $u=qx^2+rx^3$ とおいて $\ln(1+u)$ として直接展開することもでき、こちらからは係数が q と r で表される。2 つの展開を比較すると、q と r に関する事実が S_n どうしの恒等式に変わる。

解答

展開すると、

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+(a+b+c)x+(ab+bc+ca)x^2+abc\,x^3.$$

$a+b+c=0$ であるから、x の項は消える。すべての実数 x について一致する 2 つの多項式は係数が等しいので、x^2 と x^3 の係数を $1+qx^2+rx^3$ と比較すると

$$q=bc+ca+ab, \qquad r=abc,$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (i)

$|x|$ が十分小さいとき（具体的には $|x|<1/\max(|a|,|b|,|c|)$ のとき、あるいは $a=b=c=0$ ならば任意の x について）、各因数は正であり、各対数は収束する級数をもつ。

$|t| < 1$ に対して $\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}t^n/n$ を用いると、

$$\begin{aligned}\ln(1+qx^2+rx^3) &= \ln(1+ax)+\ln(1+bx)+\ln(1+cx)\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{b^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{c^nx^n}{n}\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^n+b^n+c^n}{n}x^n.\end{aligned}$$

よって x^n の係数は $(-1)^{n+1}S_n$ であり、求める結果が得られる。（$n=1$ のときは $S_1 = a+b+c = 0$ であり、x の項がないことと一致する。）

小問 (ii)

次に、同じ関数を別の方法で展開する。$u = qx^2+rx^3$ とおくと、

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots.$$

u の各項の次数は 2 以上なので、u^k には x^{2k} から x^{3k} までの冪しか現れない。x^n の係数を求めるには、$2k \leq n \leq 3k$ を満たす u^k だけを考えればよい：

$$\begin{aligned}u &= qx^2+rx^3,\\ u^2 &= q^2x^4+2qr\,x^5+r^2x^6.\end{aligned}$$

したがって、

- x^2：寄与するのは u のみで、q を与える。
- x^3：寄与するのは u のみで、r を与える。
- x^5：寄与するのは $-\frac{1}{2}u^2$ のみで、$-\frac{1}{2}(2qr) = -qr$ を与える。

係数が $-S_2$、S_3、S_5 である小問 (i) と比較すると、

$$S_2 = -q, \qquad S_3 = r, \qquad S_5 = -qr.$$

ゆえに $S_2S_3 = (-q)(r) = -qr = S_5$ となり、求める結果が得られる。

考えてみよう 同じ関数に対する 2 つの異なる級数の係数を比較してよいのはなぜか？

どちらの展開も、0 を含むある区間で $\ln(1+qx^2+rx^3)$ に収束する x の冪級数（power series）である。0 の近くで収束する冪級数の係数は一意的である（マクローリン（Maclaurin）の定理にあるように、係数は 0 における導関数を $n!$ で割ったものである）。したがって、係数は一致しなければならない。

小問 (iii)

x^7 については $2k \le 7 \le 3k$ が必要であり、これより $k = 3$ に限られる。二項定理（binomial theorem）により $u^3 = (qx^2 + rx^3)^3$ を展開すると、

$$u^3 = q^3x^6 + 3q^2r\,x^7 + 3qr^2x^8 + r^3x^9,$$

よって $\ln(1+u)$ における x^7 の係数は $\frac{1}{3} \cdot 3q^2r = q^2r$ である。小問 (i) よりこれは $(-1)^8S_7 = S_7$ に等しいので、$S_7 = q^2r$ である。小問 (ii) を用いると、

$$S_2S_5 = (-q)(-qr) = q^2r = S_7,$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (iv)

x^9 については $2k \le 9 \le 3k$ が必要であり、$k = 3$ または $k = 4$ である。

- $\frac{1}{3}u^3$ から：u^3 の x^9 の項は r^3x^9 であり、$\frac{1}{3}r^3$ を与える。
- $-\frac{1}{4}u^4$ から：$(qx^2 + rx^3)^4$ において、x^9 の項には qx^2 が 3 つと rx^3 が 1 つ必要であり、$\binom{4}{1}q^3r\,x^9 = 4q^3r\,x^9$ を与える。これは $-q^3r$ の寄与となる。

よって x^9 の係数は $\frac{1}{3}r^3 - q^3r$ であり、小問 (i) よりこれは $(-1)^{10}S_9 = S_9$ に等しい。一方、

$$S_2S_7 = (-q)(q^2r) = -q^3r.$$

したがって

$$S_9 - S_2S_7 = \tfrac{1}{3}r^3 = \tfrac{1}{3}(abc)^3,$$

であり、主張 $S_2S_7 = S_9$ が成り立つのは $abc = 0$ のとき、かつそのときに限る。一般には成り立たない。

具体的な反例（counterexample）として、$a = b = 1$、$c = -2$ をとる（このとき $a + b + c = 0$ かつ $abc = -2 \neq 0$ である）。すると

$$S_2 = \frac{1+1+4}{2} = 3, \qquad S_7 = \frac{1+1-128}{7} = -18, \qquad S_9 = \frac{1+1-512}{9} = -\frac{170}{3},$$

となり、$S_2S_7 = -54 \neq -\frac{170}{3} = S_9$ である。よって主張は偽である。

> **考えてみよう** 小問 (ii) と (iii) ではうまくいったのに、なぜ x^9 でパターンが崩れるのか？

x^5 と x^7 では u の冪が 1 つしか寄与しないので、各係数は q と r の単一の積となり、それがたまたま以前の S たちの適切な積に分解できる。x^9 では u の 2 つの冪が寄与し、u^3 から生じる余分な r^3 の項がその分解を崩してしまう。

検算

- $a = b = 1$、$c = -2$ のとき、$q = -3$、$r = -2$ である。このとき $S_2 = 3 = -q$、$S_3 = (1+1-8)/3 = -2 = r$、$S_5 = (1+1-32)/5 = -6 = -qr$ であるから、$S_2S_3 = S_5$ が成り立つ。また $S_7 = -18 = q^2r$ であり、$S_9 - S_2S_7 = -\frac{170}{3} + 54 = -\frac{8}{3} = \frac{1}{3}r^3$ となって、予想どおりである。
- $c = 0$（したがって $b = -a$）のとき、奇数番目の S_n はすべて消え、(iv) の主張の両辺はともに 0 となる。これは $abc = 0$ のとき主張が成り立つことと整合する。
- (ii)–(iv) の恒等式と $S_9 - S_2S_7$ の公式は、a と b をランダムな有理数として 200 通り選び、コンピュータによる厳密な計算でも確認した。

よくある間違い

- x^9 への u^4 の寄与を見落とす：u^3 で止めてしまいやすく、誤った係数 $\frac{1}{3}r^3$ が得られてしまう。
- $(-1)^{n+1}$ による符号の誤り：x^2 の係数は $-S_2$ であるから、$S_2 = -q$ であって q ではない。
- 二項係数を忘れる：u^3 の x^7 の項は $3q^2r$ であって、q^2r ではない。

STEP のその先へ

S_n は（因子 $1/n$ を除いて）3 次式の根の**冪和**（power sums）であり、q、r はその**基本対称式**（elementary symmetric polynomials）である。対数をとって係数を比較することは、ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）の母関数（generating function）による証明になっている。ニュートンの恒等式は、すべての冪和を基本対称式で表すものであり、その背後にある定理は、すべての対称式は基本対称式で表せるというものである。対称式と多項式の根については Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）で学ぶことができ、級数に関する STEP 形式の演習をさらに積みたければ Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）が参考になる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。