解答例

STEP II 2014、第 9 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP II 2014、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q9

鍵となる考え方

未知の力は 3 つ（張力（tension）、垂直抗力（normal reaction）、A における摩擦力（friction））であり、方程式も 3 つある。水平方向の力のつり合い、鉛直方向の力のつり合い、そして力のモーメント（moments）のつり合いである。隅 A のまわりのモーメントをとるのが巧みな選択である。壁から受ける 2 つの接触力はどちらも A に作用するので式から消え、張力と重さを結ぶ式が 1 本だけ残るからである。これが得られれば、摩擦力の向きは、糸だけで支える力が重さより大きいか小さいかという問題にすぎない。

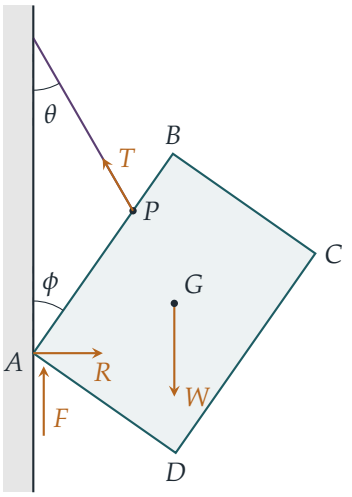
解答

薄板（lamina）を重さ W の一様な剛体（rigid body）とみなし、その重心（centre of mass）G は長方形の中心にあるとする。また糸は軽く伸び縮みしないとみなすので、張力 T は糸のどこでも等しい。A において壁は垂直抗力 R（水平で、壁から離れる向き）と摩擦力 F（鉛直）を及ぼす。F は上向きを正とする。したがって F が負であれば、摩擦力は実際には下向きにはたらくことを意味する。

A を原点とし、x 軸を壁から離れる水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。辺 AB は鉛直上向きと角 ϕ をなすので、AB 方向の単位ベクトルは $(\sin\phi, \cos\phi)$ である。辺 AD はこれに垂直で壁から離れる向きなので、その単位ベクトルは $(\cos\phi, -\sin\phi)$ である。よって

$$G = b(\sin\phi, \cos\phi) + a(\cos\phi, -\sin\phi), \qquad P = d(\sin\phi, \cos\phi),$$

ここで P は糸の取り付け点である。糸は P から壁へ向かって、鉛直下向きと角 θ をなして上方に張られているので、薄板にはたらく張力は $T(-\sin\theta, \cos\theta)$ である。



小問 (i)

水平方向と鉛直方向の力のつり合いより

$$R = T\sin\theta,$$
$$F + T\cos\theta = W.$$

A のまわりのモーメントでは、R と F は寄与しない。点 (x, y) にはたらく力 (f_x, f_y) の反時計回りのモーメントは $xf_y - yf_x$ である。P にはたらく張力についてこれは

$$d\sin\phi \cdot T\cos\theta - d\cos\phi \cdot (-T\sin\theta) = Td\sin(\theta+\phi),$$

であり、G にはたらく重力 $(0, -W)$ については $-W(a\cos\phi + b\sin\phi)$ である。よって

$$Td\sin(\theta+\phi) = W(a\cos\phi + b\sin\phi). \tag{1}$$

量 $a\cos\phi + b\sin\phi$ はちょうど G の壁からの水平距離であり、重力のモーメントをすばやく求める方法になっている。

摩擦力が上向きの極限つり合い（limiting equilibrium）では $F = \mu R = \mu T\sin\theta$ なので、鉛直方向の式は

$$T(\cos\theta + \mu\sin\theta) = W.$$

となる。これを (1) の W に代入し、T（糸がぴんと張っているので正である）で割ると

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta + \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

となり、これが $(*)$ である。

小問 (ii)

摩擦力が極限状態にあり下向きにはたらくならば、$F = -\mu R = -\mu T \sin\theta$ であり、鉛直方向の式は $T(\cos\theta - \mu\sin\theta) = W$ となる。ほかは何も変わらないので、$(*)$ は

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta - \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi);$$

となる。すなわち、μ が $-\mu$ に置き換わる。

小問 (iii)

今度は摩擦力が極限状態にあるとは仮定しない。式 (1) はどのようなつり合いでも成り立ち、

$$T = \frac{W(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)},$$

を与える。ここで θ と ϕ はともに鋭角なので $\sin(\theta+\phi) > 0$ である。すると鉛直方向の式から

$$F = W - T\cos\theta = W\left(1 - \frac{\cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)}\right).$$

が得られる。

> **考えてみよう** 「$F > 0$」を、正接（tangent）だけを含む条件に書き換えるにはどうすればよいか。

摩擦力が上向きにはたらくのは、ちょうど $F > 0$ のとき、すなわち $d\sin(\theta+\phi) > 0$ であることから

$$d\sin(\theta+\phi) > \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

のときである。$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$ と展開し、両辺を $\cos\theta\cos\phi$ で割る。両方の角が鋭角なのでこれは正であり、不等号の向きは変わらない：

$$d(\tan\theta + \tan\phi) > a + b\tan\phi.$$

$\tan\theta + \tan\phi > 0$ であるから、必要十分条件（necessary and sufficient condition）は

$$d > \frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi}.$$

である。（d がこの値に等しいときは摩擦力はまったくはたらかず、d がこれより小さいときは摩擦力は下向きにはたらく。）

物理的には、糸は辺 AB に取り付けられているので $d \le 2b$ である。条件が成り立つならば

$$\frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi} < d \le 2b,$$

なので $a + b\tan\phi < 2b\tan\theta + 2b\tan\phi$、すなわち $a < b(2\tan\theta + \tan\phi)$ である。対偶（contrapositive）をとると、$b(2\tan\theta + \tan\phi) < a$ ならば、取り付け点をどこに置いても摩擦力は上向きにならず、条件は満たされない。以上で証明が完了する。

検算

- $\mu = 0$ のとき壁はなめらかであり、$(*)$ と小問 (ii) の式は当然一致する。どちらも小問 (iii) の境界の場合 $d\sin(\theta + \phi) = \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)$ に帰着する。
- AB が鉛直な薄板（$\phi \to 0$）：境界は $d\tan\theta = a$ となる。これは、糸の作用線（line of action）が、壁から水平距離 a にある G を通る鉛直線と交わることを意味する。このとき糸と重力だけでつり合い、壁は水平に押すだけである。
- 数値例として $a = 1$、$b = 1.5$、$\theta = 30^\circ$、$\phi = 40^\circ$ とすると、臨界値は $d \approx (1 + 1.259)/(0.577 + 0.839) \approx 1.595 < 3 = 2b$ である。A ではなく G のまわりのモーメントを用いて 3 つのつり合いの式を直接解くと、この値のすぐ上では $F > 0$、すぐ下では $F < 0$ となる。数千通りのランダムな配置についてコンピュータで確認し、$(*)$、小問 (ii) の式、および (iii) の条件が正しいことを確かめた。

よくある間違い

- P や G のまわりのモーメントをとること：これでも解けるが、R と F がモーメントの式に入り込み、計算がずっと煩雑になる。
- G の位置を誤ること：D は壁から離れた側にあるので、AD は $(\cos\phi, -\sin\phi)$ の向きであり、G の壁からの水平距離は $a\cos\phi + b\sin\phi$ である。
- 最後の小問で制約 $d \le 2b$ を忘れること。AB の長さが関わるのはここだけである。

STEP のその先へ

これは小さな静定（statically determinate）問題である。平面内の剛体について、未知の力が 3 つ、独立なつり合いの式が 3 つある。技術者は何よりも先にこの数え上げを確認する。支点がこれより多いと、力は静力学だけでは決まらず、物体がどのように変形するかを知る必要がある。未知の力が作用する点のまわりのモーメントをとるという技法は、トルク（torque）の原点をうまく選ぶことの平面版である。さらに学ぶには Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。