解答例

STEP II 2014、第 8 問

純粋数学 ・ 最大の二項係数

> **STEP II 2014、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q8

鍵となる考え方

正の項からなる数列がどこで最大になるかを調べるには、各項を次の項と比べればよい。すなわち比（ratio）c_{r+1}/c_r を考えるのである。二項展開の場合、この比は r についての簡単な分数式で、単調に減少する。したがって係数は、この比が 1 を超えている間は増加し、1 を下回ると減少する。最大の係数は比が 1 をまたぐところにあり、以降の各小問はすべて、ある一つの式の整数部分（integer part）を読み取るだけの問題になる。

解答

係数とその比

二項定理（binomial theorem）により、

$$c_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \qquad 0 \le r \le n.$$

$a, b > 0$ であるから、これらはすべて正である。$0 \le r \le n-1$ のとき、

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(n-r)\,b}{(r+1)\,a},$$

ここで $\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1}$ を用いた。

$$L = \frac{b(n+1)}{a+b}.$$

とおく。$(r+1)a > 0$ であるから、

$$c_{r+1} \geq c_r \iff (n-r)b \geq (r+1)a \iff nb - a \geq r(a+b)$$
$$\iff r \leq \frac{nb-a}{a+b} = \frac{b(n+1)}{a+b} - 1 = L - 1,$$

であり、すべてを $=$ に置き換えても同じ同値関係が成り立つ。よって

$c_{r+1} > c_r$ となるのは$r < L-1$, $\quad c_{r+1} = c_r$ となるのは$r = L-1$, $\quad c_{r+1} < c_r$ となるのは$r > L-1$ $\quad (*)$

m の範囲

上からの評価。 $m = 0$ ならば、$L > 0$ であるから $m \leq L$ である。$m \geq 1$ ならば、c_m が最大であることから $c_m \geq c_{m-1}$ であり、$r = m-1$ として $(*)$ を用いると $m - 1 \leq L - 1$、すなわち $m \leq L$ を得る。

下からの評価。 $m = n$ ならば、$L < n+1$（$\frac{b}{a+b} < 1$ による）であるから $m \geq L-1$ である。$m \leq n-1$ ならば $c_m \geq c_{m+1}$ であり、$r = m$ として $(*)$ を用いると $m \geq L-1$ でなければならない。

以上より、いずれの場合も

$$\frac{b(n+1)}{a+b} - 1 \leq m \leq \frac{b(n+1)}{a+b},$$

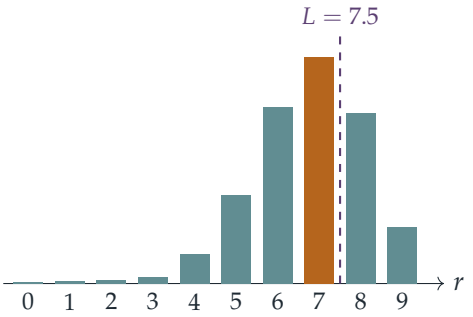
が成り立ち、示すべきことが示された。

> **考えてみよう** m の値が三つあったり、隣り合わない二つの値があったりすることがないのはなぜか？

区間 $[L-1, L]$ の長さは 1 である。L が整数でなければ、この区間に含まれる整数はちょうど一つ、$\lfloor L \rfloor$ であり、m は一意に定まる。L が整数ならば、この区間に含まれる整数は連続する二つの整数 $L-1$ と L だけであり、m はそのいずれかである。（実際、$r = L-1$ として $(*)$ を用いると $c_{L-1} = c_L$ となるので、両方とも本当に最大である。）いずれにせよ、一意な値、あるいは二つのうち大きい方は

$$G(n,a,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{a+b} \right\rfloor.$$

である。以降はこの公式だけを用いればよい。



$(1+3x)^9$ の係数を縮尺どおりに描いたもの：$r < L-1 = 6.5$ の間は増加し、その後減少して、$r = 7$ で最大となる。

小問 (i)

$(n,a,b) = (9,1,3)$ のとき、$L = \frac{3\times10}{4} = 7.5$ であるから $G(9,1,3) = 7$ である。

$(n,a,b) = (9,2,3)$ のとき、$L = \frac{3\times10}{5} = 6$ は整数であるから、最大の係数は $r = 5$ と $r = 6$ の両方で現れ、$G(9,2,3) = 6$ である。（検算：$c_5 = 126\cdot 2^4\cdot 3^5 = 489\,888 = 84\cdot 2^3\cdot 3^6 = c_6$。）

小問 (ii)

$a = b$ のとき、$L = \frac{n+1}{2}$ である。

- $n = 2k$：$L = k + \frac{1}{2}$ であるから、$G(2k,a,a) = k$（中央の係数で、一意）。
- $n = 2k-1$：$L = k$ は整数であるから、中央の二つの係数 $r = k-1$ と $r = k$ が等しくなり、$G(2k-1,a,a) = k$ である。

これはパスカルの三角形（Pascal's triangle）の各行の対称性と一致している。

小問 (iii)

n と b を固定すると、$L = \frac{b(n+1)}{a+b}$ は a の減少関数であるから、$\lfloor L \rfloor$ は a について単調非増加（non-increasing）な関数である。したがって正の整数の範囲では $a = 1$ で最大となり、そのとき $G(n,1,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{b+1} \right\rfloor$ である。（他の a の値で同じ値になることはありうるが、これを上回るものはない。）

小問 (iv)

ここで

$$\frac{b(n+1)}{b+1} = (n+1) - \frac{n+1}{b+1}.$$

である。$\frac{n+1}{b+1} > 0$ であるから、これは $n+1$ より小さく、よって $G(n,1,b) \leq n$ である。（これは $m \leq n$ からも従う。）さらに、

$$G(n,1,b) = n \iff (n+1) - \frac{n+1}{b+1} \geq n \iff \frac{n+1}{b+1} \leq 1 \iff b \geq n.$$

よって $G(n,1,b)$ のとりうる最大の値は n であり、それが達成されるのはちょうど $b \geq n$ のときである。$b = n$ のときは、$c_{n-1} = n \cdot b^{n-1} = b^n = c_n$ であるから最後の二つの係数が等しくなる。$b > n$ のときは最後の係数 b^n がただ一つの最大値である。

検算

- $(1+3x)^9$ の係数は $1, 27, 324, 2268, 10206, 30618, 61236, 78732, 59049, 19683$ であり、最大は $r = 7$ のところにある。これは (i) の結果と一致する。
- $(1+x)^4$（$n = 2k$、$k = 2$）の係数 $1, 4, 6, 4, 1$ は $r = 2 = k$ で最大となる。$(1+x)^3$（$k = 2$）の係数は $1, 3, 3, 1$ であり、$r = 1, 2$ で等しく、大きい方の値は $2 = k$ である。
- (iv) で $n = 3$ の場合：$(1+2x)^3$ の係数は $1, 6, 12, 8$ で、$r = 2$ で最大となる。$(1+3x)^3$ の係数は $1, 9, 27, 27$ であるから、$b = 3$ となったところで $G = 3$ に達する。
- $n < 30$、$a, b < 15$ のすべてについて $G(n,a,b) = \lfloor b(n+1)/(a+b) \rfloor$ をコンピュータで確かめたところ、すべての場合で一致した。

よくある間違い

- 範囲を証明する際に端の場合 $m = 0$ と $m = n$ を忘れること。比べるべき c_{-1} や c_{n+1} は存在しない。
- L が整数のとき、等しい二つの値のうち小さい方をとること。G は大きい方として定義されているので、$G(9,2,3) = 6$ であり、5 ではない。
- (iv) で $b = n$ とだけ答えること。$b \geq n$ であればどれでも $G = n$ となる。

STEP のその先へ

ここで用いた、連続する項を比べるという比による判定は、級数の収束に関する比判定法（ratio test）と同じ考え方である。また、これにより $p = \frac{b}{a+b}$ とした二項分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(n,p)$ の最頻値（mode）の位置がわかる。最頻値は $\lfloor (n+1)p \rfloor$ である。二項係数のように、項が増加した後に減少する数列は単峰（unimodal）であるといい、これを証明するための標準的な道具が対数凹性（log-concavity、$c_r^2 \geq c_{r-1}c_{r+1}$）

である。確率論の側面については、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。