解答例

STEP II 2014、第 7 問

純粋数学 • 絶対値関数のグラフ

> **STEP II 2014、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q7

鍵となる考え方

絶対値関数（modulus function）の和は区分的に線形（piecewise linear）である。すなわち、傾き（gradient）が変わるのは、いずれかの絶対値の中身が 0 になる点だけである。したがって $|x-a|+|x-b|$ のグラフは、a と b の間に平らな底をもち、傾き ± 2 の壁をもつ「浴槽」の形になる。後半の方程式の解の個数を数える問題は、傾きの比較に帰着する。傾き 2 のグラフは傾き 1 のグラフに必ず追いつき、同じ傾きの二つのグラフは一致するか、まったく交わらないかのどちらかである。

解答

以下では一貫して、$a<b$ として $f(x)=|x-a|+|x-b|$ とおく。

小問 (i)

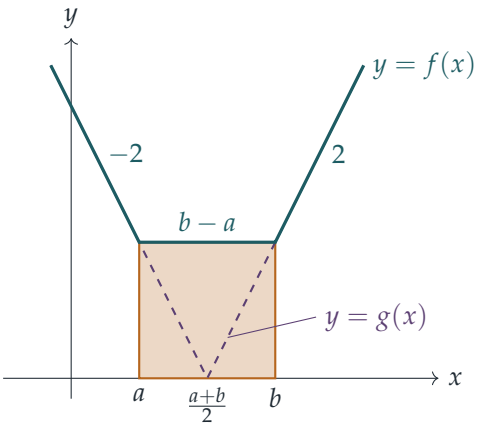
区間ごとに絶対値をはずすと

$$f(x)=\begin{cases} a+b-2x, & x\le a,\\ b-a, & a\le x\le b,\\ 2x-a-b, & x\ge b. \end{cases}$$

よって傾きは、$x<a$ で -2、$a<x<b$ で 0、$x>b$ で 2 である。グラフは連続（continuous）であり、$[a,b]$ の上で高さ $b-a$ の平らな底をもつ。

$g(x)=|2x-a-b|=2|x-\frac{a+b}{2}|$ のグラフは、頂点が $(\frac{a+b}{2},0)$ で傾きが ± 2 の V 字形である。$x\ge b$ のとき $2x-a-b\ge b-a>0$ であるから $g(x)=2x-a-b=f(x)$ となり、同様に $x\le a$ のとき $g(x)=a+b-2x=f(x)$ となる。したがって二つのグラフは

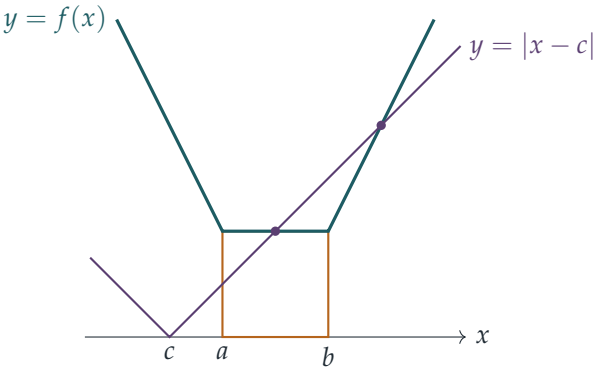
(a,b) の外側で一致する。内側では、f が $b-a$ のままであるのに対し、g は 0 まで下がる。（実際、$f(x)=\max\{b-a,\,g(x)\}$ である。）



$f(a)=f(b)=b-a$ を用いると、この四角形（quadrilateral）の頂点は $(a,0)$、$(b,0)$、$(b,b-a)$、$(a,b-a)$ である。底辺の長さは $b-a$、縦の辺の長さも $b-a$ であり、すべての角は直角である。よってこれは一辺 $b-a$ の**正方形**（square）である。また、$g(a)=g(b)=b-a$ であるから、g の V 字は正方形の底辺の中点（midpoint）から出て、上の二つの角を通ることにも注意しよう。

小問 (ii)

次に、$y=f(x)$ と $y=|x-c|$ を比べる。後者は頂点 $(c,0)$ が軸上にあり、腕の傾きが ±1 の V 字形である。鍵となる事実は、f はつねに $b-a>0$ 以上であり、その壁（傾き ±2）は V 字の腕より急だということである。図は $c<a$ の場合で、V 字が浴槽と 2 回交わる様子を示している。



$a<c<b$ の場合：解なし。 $[a,b]$ 上では、距離 $|x-c|$ は高々 $\max\{c-a,\,b-c\}<$

$b-a=f(x)$ であるから、V 字は浴槽の底より真に下にある。$x \geq b$ のとき

$$f(x)-|x-c| = (2x-a-b)-(x-c) = x-b+(c-a) \geq c-a > 0,$$

であり、$x \leq a$ についても同じ議論（あるいは後で述べる対称性）で処理できる。よって V 字は完全に浴槽の内側にあり、解は存在しない。

$c=a$ または $c=b$ の場合：解は 1 個。 $c=a$ とする。$[a,b]$ 上では $|x-a| = x-a \leq b-a$ であり、等号は $x=b$ のときに限る。$x>b$ のとき $f(x)-(x-a) = x-b > 0$、$x<a$ のとき $f(x)-(a-x) = b-x > 0$ である。よって解は $x=b$ のみであり、V 字の右の腕はちょうど正方形の上の角 $(b, b-a)$ を通る。同様に、$c=b$ のときの解は $x=a$ のみである。

$c<a$ の場合：解は 2 個。 左の腕 $y=c-x$ は $x \leq c < a$ の範囲にあり、そこでは f の傾きは -2 である。$x=c$ において $f(c) > 0 = c-c$ であり、左へ進むにつれて f は腕より速く増加するので、すべての $x \leq c$ に対して $f(x) > c-x$ である。左の腕からは解は得られない。

右の腕 $y=x-c$（$x \geq c$）について、$k(x) = f(x)-(x-c)$ とおく。f の傾きから 1 を引くと、k の傾きは (c,a) で -3、(a,b) で -1、$x>b$ で $+1$ である。よって k は $[c,b]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[b,\infty)$ で狭義単調増加である。さらに

$$k(c) = f(c) > 0, \qquad k(b) = (b-a)-(b-c) = c-a < 0, \qquad k(x) \to \infty \text{ ただし} x \to \infty.$$

したがって k は (c,b) にちょうど 1 個、(b,∞) にちょうど 1 個の零点をもつ。具体的には、これらは

$$x = a+b-c \quad \text{と} \quad x = \begin{cases} b-a+c, & 2a-b \leq c < a, \\ \frac{1}{3}(a+b+c), & c < 2a-b, \end{cases}$$

であり、二つ目の解はそれぞれ浴槽の底、または左の壁と交わる点である。

$c>b$ の場合：解は 2 個。 直線 $x=\frac{a+b}{2}$ に関する鏡映（reflection）$x \mapsto a+b-x$ は f を変えず（$|x-a|$ と $|x-b|$ を入れ替える）、$|x-c|$ を $c' = a+b-c < a$ として $|x-c'|$ に移す。よってこの場合は前の場合の鏡像である。

まとめると、解の個数は、$a<c<b$ ならば 0 個、$c=a$ または $c=b$ ならば 1 個、$c<a$ または $c>b$ ならば 2 個である。

小問 (iii)

$F(x) = |x-c|+|x-d|$ とおく。小問 (i) より、F は二つ目の浴槽であり、$[c,d]$ の上に高さ $d-c$ の底をもち、壁の傾きは ± 2 である。$d-c < b-a$ であるから、その底は f の底より低く、幅も狭い。二つの底の中点を

$$m = \tfrac{1}{2}(a+b), \qquad n = \tfrac{1}{2}(c+d)$$

と書き、$h(x) = f(x) - F(x)$ とおく。

十分左側（$x \leq \min\{a,c\}$）では両方のグラフが左の壁の上にあるので、$h(x) = (a+b-2x) - (c+d-2x) = 2(m-n)$ である。十分右側（$x \geq \max\{b,d\}$）では $h(x) = 2(n-m)$ である。その間では、h は連続かつ区分的に線形である。

考えてみよう 二つのグラフが線分全体を共有し、解が無数に存在することはありうるか？

それが起こりうるのは、傾きが等しいところだけである。二つの底はどちらも平らだが、高さ $b-a \neq d-c$ が異なるので重ならない。それ以外で傾きが一致するのは、両方のグラフが左の壁上にある（$x < \min\{a,c\}$）か、両方が右の壁上にある（$x > \max\{b,d\}$）ときだけであり、そこでは $h = \pm 2(m-n)$ である。よって二つのグラフが線分を共有するのは、ちょうど $m = n$ のときである。

$a+b = c+d$ の場合：解は無数。 このとき $x \leq \min\{a,c\}$ および $x \geq \max\{b,d\}$ で $h = 0$ である。$d-c < b-a$ かつ中点が一致するので $a < c < d < b$ であり、小さい浴槽は大きい浴槽の中央に収まっている。$c \leq x \leq b$ では F のグラフは底か右の壁の上にあるので、$F(x) \leq 2b - c - d = b - a = f(x)$ であり、等号は $x = b$ のときに限る。対称性により $[a,d]$ でも同じことが成り立つ。よって解の集合は、ちょうど $x \leq a$ と $x \geq b$ を合わせたものである。

$a+b < c+d$ の場合：解はちょうど 1 個。 このとき、十分左側で $h = 2(m-n) < 0$、十分右側で $h = 2(n-m) > 0$ である。h が減少しうるのはどこか。それには f の傾きが F の傾きより小さくなければならない。その可能性は二通りある。

- f が左の壁上にあり、F がそうでない場合。これには $c < x < a$ が必要である。すると $c < a$ であり、$d-c < b-a$ より $d < b$ でもあるから $c+d < a+b$ となるが、これはこの場合に反する。
- f が底の上にあり、F が右の壁上にある場合。これには $d < x < b$ が必要である。

よって h は $(-\infty, d]$ で単調非減少である。$[d,\infty)$ では、h は $[d,b]$ で（$d < b$ ならば）単調非増加であり、その後 $x \geq \max\{b,d\}$ では $2(n-m)$ で一定である。よってすべての $x \geq d$ に対して $h(x) \geq 2(n-m) > 0$ である。$(-\infty, d]$ では、h は値 $2(m-n) < 0$ から $h(d) > 0$ まで減少することなく増加し、（上の枠の議論により）値が 0 となる区間で一定になることはない。よって h はそこにちょうど 1 個の零点をもつ。したがって解は全体でちょうど 1 個である。

$a+b > c+d$ の場合：解はちょうど 1 個。 鏡映 $x \mapsto -x$ により a,b,c,d は $-b,-a,-d,-c$ に置き換わり、和の大小関係が逆転するので、前の場合に帰着する。

まとめると、$a < b$、$c < d$、$d-c < b-a$ のもとで、$a+b = c+d$（二つの区間の中点

が一致する）ならば解は無数に存在し、それはすべての $x \leq a$ とすべての $x \geq b$ である。それ以外の場合、解はちょうど 1 個である。

検算

- 小問 (ii) で $a = 1$、$b = 3$、$c = 0$ とすると、解 $x = a + b - c = 4$ と $x = b - a + c = 2$ について $|3| + |1| = 4$ と $1 + 1 = 2$ となり、確かに成り立つ。$c = -5$ のとき二つ目の解は $\frac{1}{3}(1 + 3 - 5) = -\frac{1}{3}$ であり、実際 $\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{14}{3} = |-\frac{1}{3} + 5|$ である。
- 小問 (iii) で $a = 0$、$b = 10$、$c = 6$、$d = 7$ とすると、h は十分左側で -3 であり、$[6, 7]$ で 9 まで増加し、その後 3 まで減少してそのまま一定となる。唯一の零点は $x = \frac{3}{2}$ であり、そこでは両辺とも 10 に等しい。
- a, b, c, d をランダムな整数として数万通り選んでコンピュータで確かめたところ、すべての場合で上の解の個数とちょうど一致した。

よくある間違い

- (ii) で、V 字が正方形の角にちょうど接する境界の場合 $c = a$ と $c = b$ を見落とす。
- (iii) で、h が単調（monotonic）であると思い込む。実際はそうではない。小さい浴槽が大きい浴槽の中で中央からずれているとき、h は (d, b) で減少する。それでも解の個数が変わらないのは、そこでは h がすでに正だからである。
- (iii) で、中点が一致するときに解が無数になる場合を見落とす。

STEP のその先へ

関数 $|x - a| + |x - b|$ は、x から 2 点までの距離の合計である。このような距離の和を最小化するという考え方は、統計学における中央値（median）や、ℓ^1 ノルム（norm、「タクシー距離」）の背後にある。f のような関数は凸（convex）であり、ここで用いた「区間ごとに傾きが増加していく」という議論は、線形計画法（linear programming）や最適化（optimisation）の基礎となる凸解析（convex analysis）の出発点である。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、ここで用いた連続性と単調性の議論が厳密に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。