解答例

STEP II 2014、第 6 問

純粋数学 • 三角級数

> **STEP II 2014、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q6

鍵となる考え方

各 $\cos rx$ に $2\sin\frac{1}{2}x$ を掛けると二つの正弦の差になるので、和は隣り合う項が次々に打ち消し合う（telescoping）形になる。その和はちょうど $S_n'(x)$ であり、この恒等式が与えられているのはそのためである。つまり、この恒等式によって S_n がどこで停留点（stationary point）をとるかがわかる。そのような点では新しい項 $\frac{1}{n}\sin nx$ が非負となることがわかるので、この項を加えても負の最小値は生じない。あとは $S_1 = \sin x$ から始める数学的帰納法（induction）で証明が完成する。

解答

余弦の和

和積公式（factor formula）$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ において $A = (r+\frac{1}{2})x$, $B = (r-\frac{1}{2})x$ とすると、

$$\sin(r+\tfrac{1}{2})x - \sin(r-\tfrac{1}{2})x = 2\cos rx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

これを $r = 1$ から n まで加えると、右辺の和は $2\sin\frac{1}{2}x\,(\cos x + \cdots + \cos nx)$ となり、左辺では最初と最後の項以外がすべて打ち消し合う：

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{r=1}^{n}\cos rx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x.$$

両辺を $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ で割れば求める結果が得られる。項別に微分すると

$$S_n'(x) = \sum_{r=1}^{n}\cos rx,$$

となることに注意しよう。したがって、この恒等式は S_n' の閉じた形の表示である。

小問 (i)

ここでは $S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ であるから、

$$S_2'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

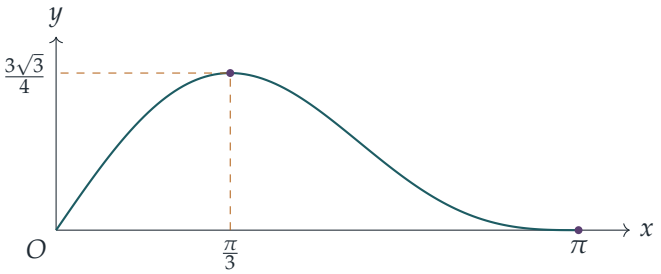
$[0, \pi]$ 上でこれが 0 になるのは $\cos x = \frac{1}{2}$、すなわち $x = \frac{\pi}{3}$ のときと、$\cos x = -1$、すなわち $x = \pi$ のときである。そのときの値は

$$S_2(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad S_2(\pi) = 0.$$

$\cos x + 1 \geq 0$ であるから、S_2' の符号は $2\cos x - 1$ の符号と一致し、$[0, \frac{\pi}{3})$ では正、$(\frac{\pi}{3}, \pi)$ では負である。よって $x = \frac{\pi}{3}$ で極大となり、S_2 はそこから減少して $x = \pi$ で 0 に達し、そのとき傾きは零である。π の近くで $x = \pi - t$ とおくと、

$$S_2 = \sin t - \tfrac{1}{2}\sin 2t \approx \left(t - \tfrac{t^3}{6}\right) - \left(t - \tfrac{4t^3}{6}\right) = \tfrac{1}{2}t^3,$$

となるので、曲線は軸に達するとき三次関数のように平らになる。また $S_2(0) = 0$ かつ $S_2'(0) = 2$ である。



小問 (ii)

$0 < x_0 < \pi$ において $S_n'(x_0) = 0$ であるとする。このとき $\sin\frac{1}{2}x_0 \neq 0$ であるから恒等式が適用でき、$\sin(n + \frac{1}{2})x_0 = \sin\frac{1}{2}x_0$ が得られる。左辺を展開すると、

$$\sin nx_0 \cos\tfrac{1}{2}x_0 + \cos nx_0 \sin\tfrac{1}{2}x_0 = \sin\tfrac{1}{2}x_0 \iff \sin nx_0 \cos\tfrac{1}{2}x_0 = (1 - \cos nx_0)\sin\tfrac{1}{2}x_0.$$

$0 < \frac{1}{2}x_0 < \frac{\pi}{2}$ より $\cos\frac{1}{2}x_0 > 0$ であり、これで割ると

$$\sin nx_0 = (1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0,$$

となり、求める式が得られる。したがって $n \geq 2$ のとき、

$$S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0) = \frac{1}{n}\sin nx_0 = \frac{1}{n}(1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0 \geq 0,$$

である。なぜなら $1 - \cos nx_0 \geq 0$ かつ $\tan\frac{1}{2}x_0 > 0$ だからである。よって $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$ が成り立つ。

次に、すべての $x \in (0, \pi)$ に対して $S_{n-1}(x) > 0$ であると仮定し、矛盾を導くために、ある $c \in (0, \pi)$ に対して $S_n(c) \leq 0$ であると仮定する。

> **考えてみよう** 利用できる停留点が存在することは、どうしてわかるだろうか？

S_n は閉区間 $[0, \pi]$ 上で連続（continuous）であるから、そこで最小値 m をとり、$m \leq S_n(c) \leq 0$ である。$m < 0$ ならば、$S_n(0) = S_n(\pi) = 0$ であるから最小値は端点ではとられない。$m = 0$ ならば、c 自身が最小値をとる内点である。いずれの場合も $S_n(x_0) = m \leq 0$ となる $x_0 \in (0, \pi)$ が存在し、S_n は微分可能（differentiable）であるから、内点での最小値は停留点であり、$S_n'(x_0) = 0$ となる。すると先の結果より

$$0 \geq S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0) > 0,$$

となり、矛盾である。よって、すべての $x \in (0, \pi)$ に対して $S_n(x) > 0$ である。

小問 (iii)

$0 < x < \pi$ に対して $S_n(x) > 0$ であることを数学的帰納法で証明する。$n = 1$ のとき、$(0, \pi)$ 上で $S_1(x) = \sin x > 0$ である。S_{n-1} について成り立つならば、小問 (ii) より S_n についても成り立つ。よって、すべての $n \geq 1$ について成り立つ。端点ではすべての項 $\frac{1}{r}\sin rx$ が零であるから、$S_n(0) = S_n(\pi) = 0$ である。したがって、すべての $n \geq 1$ と $0 \leq x \leq \pi$ に対して $S_n(x) \geq 0$ である。

検算

- 余弦の和で $n = 1$ とおくと、$\dfrac{\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$ は $\cos x$ になるはずであり、和積公式により実際にそうなる。
- 小問 (i) は恒等式と整合する：$S_2' = 0$ は $\sin \frac{5}{2}x = \sin \frac{1}{2}x$ を意味し、$(0, \pi]$ におけるその解は $x = \frac{\pi}{3}$ と $x = \pi$ である。
- 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$ は、細かい格子点上で S_2 を直接計算した値と一致する。コンピュータによる確認では、$2 \leq n \leq 40$ について $(0, \pi)$ における S_n のすべての停留点を求め、そのそれぞれで小問 (ii) の恒等式と $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$ が成り立つことを確かめた。また $n \leq 60$ について区間の内部で $S_n > 0$ であることも確かめた。

よくある間違い

- 「いたるところで $S_n \geq S_{n-1}$」と論じること。これは誤りである（例えば $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上で $\sin 2x < 0$ である）。この不等式が成り立つのは S_n の停留点においてだけであり、だからこそ最小値を用いた議論が必要になる。
- 最小値の位置を特定するときに端点を忘れること：正でない最小値が区間の内部にあることを示すには、$S_n(0) = S_n(\pi) = 0$ を用いなければならない。
- $\cos \frac{1}{2}x_0$ が正である理由を述べずに、それで割ること。

STEP のその先へ

小問 (iii) の結果は、フェイエール・ジャクソン・グロンウォールの不等式（Fejér–Jackson–Gronwall inequality）である。$n \to \infty$ のとき、$(0, \pi]$ 上で $S_n(x)$ は $\frac{1}{2}(\pi - x)$ に収束（converge）する：$\sum \frac{1}{r} \sin rx$ はのこぎり波（sawtooth wave）のフーリエ級数（Fourier series）であり、$x = 0$ の近くでは部分和が行き過ぎる（ギブス現象（Gibbs phenomenon））。フーリエ級数と、それがいつ収束するかという繊細な問題は、大学初年次の解析学や応用数学の講義の中心的な話題である。T. W. Körner の *Fourier Analysis*（フーリエ解析）は、幅広い内容を扱ったすばらしい解説書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。