解答例

STEP II 2014、第 5 問

純粋数学 • 同次形微分方程式

> **STEP II 2014、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q5

鍵となる考え方

どちらの右辺も一次式どうしの比である。(i) ではすべての項の次数（degree）が 1 なので、傾き（gradient）は y/x だけで決まり、$y = xu$ とおけば方程式は変数分離形（separable）になる。(ii) では定数項があるためこの方法はそのままでは使えないが、分子と分母の 2 直線の交点に原点を移せば定数項を消すことができ、あとは (i) とまったく同じである。

解答

$y = xu$ とすると、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

小問 (i)

右辺の分子と分母を x で割ると、方程式は

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1}{u-2}, \qquad \text{よって} \qquad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1-u(u-2)}{u-2} = \frac{1+4u-u^2}{u-2}.$$

となる。変数を分離すると

$$\int \frac{u-2}{1+4u-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう 部分分数分解（partial fractions）を使わずに左辺を積分するにはどうすればよいか。

分母を微分すると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4u-u^2) = 4-2u = -2(u-2)$ である。したがって分子は分母の導関数の $-\frac{1}{2}$ 倍であり、

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left|1+4u-u^2\right| = \ln|x| + C.$$

両辺に -2 を掛けて指数をとると、正の定数 A を用いて $x^2\left|1+4u-u^2\right| = A$ となる。すなわち、ある定数 K に対して $x^2(1+4u-u^2) = K$ である（曲線に沿って符号は一定である）。ここで $u = y/x$ を代入すると $x^2(1+4y/x-y^2/x^2) = x^2+4xy-y^2$ なので、

$$x^2+4xy-y^2 = K.$$

$(1,1)$ において $K = 1+4-1 = 4$ となるから、解曲線は

$$\boxed{x^2+4xy-y^2 = 4}$$

である（$(1,1)$ では $u = 1$ であり、$1+4u-u^2 = 4 \neq 0$ かつ $u \neq 2$ なので、出発点において割った式はどれも 0 にならない）。

小問 (ii)

2 直線 $x-2y-4 = 0$ と $2x+y-3 = 0$ の交点は $y = 3-2x$ かつ $x-2(3-2x)-4 = 0$ を満たす点、すなわち $(2,-1)$ である。そこで $a = 2$、$b = -1$ とし、$x = X+2$、$y = Y-1$ とおく。このとき $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$ であり、

$$x-2y-4 = (X+2)-2(Y-1)-4 = X-2Y,$$
$$2x+y-3 = 2(X+2)+(Y-1)-3 = 2X+Y,$$

となるので、定数項が消えて

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-2Y}{2X+Y}.$$

これは (i) と同じ形であるから、$Y = XV$ とおくと

$$V+X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V}{2+V} \quad\Longrightarrow\quad X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V-V(2+V)}{2+V} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(1-4V-V^2) = -2(2+V)$ なので、ここでも分子は分母の導関数の定数倍である。よって

$$\int \frac{2+V}{1-4V-V^2}\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{X}\,\mathrm{d}X \quad\Longrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}\ln\left|1-4V-V^2\right| = \ln|X| + C,$$

となり、先ほどと同様に $X^2(1-4V-V^2)=K$、すなわち

$$X^2-4XY-Y^2=K.$$

点 $(1,1)$ は $X=-1$、$Y=2$ に対応するので、$K=1-4(-1)(2)-4=5$ である。x と y に戻すと

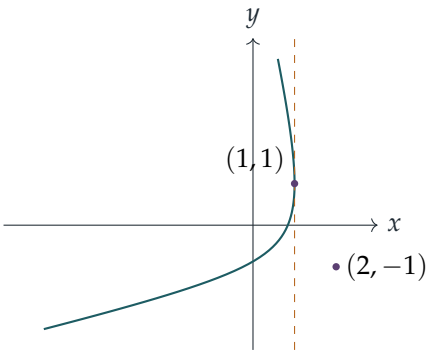
$$(x-2)^2-4(x-2)(y+1)-(y+1)^2=5,$$

となり、展開すると

$$\begin{aligned}&(x^2-4x+4)-4(xy+x-2y-2)-(y^2+2y+1)=5\\ \iff\quad &\boxed{x^2-4xy-y^2-8x+6y+6=0}\end{aligned}$$

考えてみよう $(1,1)$ では分母 $2x+y-3$ が 0 になる。それでもこの解は意味をもつだろうか。

意味をもつ。そこでは傾きが無限大となるので、曲線は $(1,1)$ で鉛直な接線（vertical tangent）をもつ。陰関数の方程式は曲線をまったく問題なく表しており、ただその点を通る関数 $y(x)$ のグラフになっていないというだけである。言い換えれば、x は y のなめらかな関数である。x についての二次方程式を解くと、$(1,1)$ を通る枝では $x=2y+4-\sqrt{5y^2+10y+10}$ となる。$5y^2+10y+10=5(y+1)^2+5>0$ であるからこれはすべての y で定義され、$y=1$ において最大値 $x=1$ をとる。



図は $(1,1)$ を通る枝（青緑）を示しており、この枝はその点で鉛直線 $x=1$（破線）に接している。$(2,-1)$ は双曲線（hyperbola）の中心である。

検算

- 答えを陰関数微分(implicit differentiation)する。(i) では $2x+4y+(4x-2y)y'=0$ から $y'=\dfrac{x+2y}{y-2x}$ となり、求める式に一致する。(ii) では $2x-4y-8+(6-4x-2y)y'=$

0 から $y' = \dfrac{x-2y-4}{2x+y-3}$ となる。

- どちらの曲線も $(1,1)$ を通る：$1+4-1=4$、$1-4-1-8+6+6=0$。
- それぞれの微分方程式を $(1,1)$ からコンピュータで数値的に解き進めたところ、枠で囲んだ式の左辺は約 10^{-13} の精度でそれぞれ 4 と 0 に等しいままであった。(i) では $(1,1)$ における傾きは -3 である。

よくある間違い

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = u + x\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ の u を忘れてしまい、誤った変数分離形の方程式を得る。
- (ii) で条件を誤った座標系で適用する：点 $(1,1)$ は $(X,Y) = (-1,2)$ になるのであって、$(1,1)$ ではない。
- u について部分分数分解に飛びつく：$1+4u-u^2$ の根は $2\pm\sqrt{5}$ で計算が煩雑になるが、被積分関数はすでに f'/f の形をしている。

STEP のその先へ

右辺が y/x だけに依存する方程式は同次形（homogeneous）と呼ばれ、(ii) の原点の平行移動は一次関数どうしの比に対する定石である。ここで扱った 2 つの方程式はどちらも完全微分方程式（exact equation）でもある。(i) を $(2y+x)\,\mathrm{d}x - (y-2x)\,\mathrm{d}y = 0$ と書くと、2 つの係数は交差微分の条件を満たし、保存量 $x^2+4xy-y^2$ を直接読み取ることができる。完全微分方程式、積分因子（integrating factor）、そして線形系の相図（phase portrait）（双曲線の正体はまさにこれである）については、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。