解答例

STEP II 2014、第 4 問

純粋数学 • 置換積分

STEP II 2014、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q4

鍵となる考え方

置換（substitution）$u = 1/x$ は区間 $[1/b, b]$ の両端を入れ替えるので、積分 I は同じ範囲上の積分に戻る。新しい被積分関数（integrand）がもとのものの符号を変えただけなら、$I = -I$ が得られる。何か密接に関係したものになるなら、I の二つの表示を足し合わせることで、ずっと積分しやすい被積分関数が得られることがある。最後の小問では、$[0, \infty)$ がそれ自身に写るように $u = a^2/x$ とおいて同じ工夫を用いると、求めたい積分について解くことのできる方程式が得られる。

解答

小問 (i)

この積分を I とおく。$x = 1/u$ とすると $\mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ であり、$\ln x = -\ln u$ である。$x = 1/b$ のとき $u = b$、$x = b$ のとき $u = 1/b$ である。また

$$(a^2 + x^2)(a^2x^2 + 1) = \left(a^2 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{a^2}{u^2} + 1\right) = \frac{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)}{u^4}.$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int_b^{1/b} \frac{\frac{1}{u}(-\ln u)}{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)/u^4}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_b^{1/b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u = -\int_{1/b}^{b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

最後の積分は、ダミー変数（dummy variable）の名前を変えただけで I そのものである。したがって $I = -I$ となり、$I = 0$ が得られる。これで題意が示された。（$b > 0$ な

ので被積分関数は $[1/b, b]$ 上で連続であり、I は有限の値であるから、この議論は正当である。）

小問 (ii)

この積分を I とおく。同じ置換により $\frac{\mathrm{d}x}{x} = u \cdot (-\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$ となり、積分区間の端も先ほどと同様に入れ替わる。

$$I = \int_b^{1/b} \arctan\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big(-\frac{1}{u}\Big)\mathrm{d}u = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

今回は単に符号が反転するわけではないので、この表示をもとの表示に足し合わせる。

$$2I = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan u + \arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

考えてみよう $u > 0$ のとき、$\arctan u + \arctan(1/u)$ はいくらか？

$u > 0$ として $\theta = \arctan u$ とおくと、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta = 1/u$ である。$\frac{\pi}{2} - \theta$ もまた $(0, \frac{\pi}{2})$ に属するので、これは $\arctan(1/u)$ に等しい。よって、すべての $u > 0$ に対して $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$ である。（$u < 0$ のときはこの和は $-\frac{\pi}{2}$ になるが、$[1/b, b]$ に属する u はすべて正である。）したがって

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/b}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}(\ln b - \ln(1/b)) = \pi \ln b,$$

となるので、$I = \dfrac{\pi \ln b}{2}$ であり、題意が示された。これは $b > 1$ の場合にも $0 < b < 1$ の場合にも成り立つ。

小問 (iii)

$J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2}$ とおく。被積分関数は連続であり、x が大きいところでは $1/x^4$ 以下であるから、この積分は収束（converge）する。$(0, \infty)$ をそれ自身に写し、$a^2 + x^2$ を $a^2 + u^2$ の定数倍に変えるような置換が欲しいので、$u = a^2/x$、すなわち $k = a^2$ とする。このとき $x = a^2/u$、$\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$ であり、$x \to 0^+$ は $u \to \infty$ に対応し、

$$a^2 + x^2 = a^2 + \frac{a^4}{u^2} = \frac{a^2(u^2 + a^2)}{u^2}.$$

したがって

$$J = \int_{\infty}^{0} \frac{u^4}{a^4(a^2 + u^2)^2}\Big(-\frac{a^2}{u^2}\Big)\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

ここで分子を $u^2 = (a^2 + u^2) - a^2$ と書き直す。

$$\frac{u^2}{(a^2+u^2)^2} = \frac{1}{a^2+u^2} - \frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}.$$

どちらの項も $(0, \infty)$ 上の積分が収束するので、積分を分けてよい。与えられた結果を用いると

$$J = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - a^2 J\right) = \frac{\pi}{2a^3} - J.$$

よって $2J = \dfrac{\pi}{2a^3}$ であるから、

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3},$$

となり、題意が示された。

検算

- (ii) において、$b = 1$ とすると積分区間の長さが零になり、実際 $\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$ である。b を $1/b$ に置き換えると積分区間の端が入れ替わるので、積分の符号が変わるはずであり、$\ln(1/b) = -\ln b$ はこれと合っている。
- (iii) において、答えは正しくスケールするはずである。$x = at$ とおくと $J = a^{-3}\int_0^\infty (1+t^2)^{-2}\,\mathrm{d}t$ となるので、J は定数と a^{-3} の積でなければならない。$a = 1$ のとき、置換 $x = \tan\theta$ により $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$ が得られ、結果と一致する。
- 数値的には、$b = 2$ のときの (ii) の積分は $1.08879\ldots = \frac{\pi}{2}\ln 2$ である。(i) の積分は、a と b をいくつか無作為に選んで計算すると、（小数点以下何桁にもわたって）0 になる。

よくある間違い

- $u = 1/x$ によって積分区間の端も逆になることを忘れる。$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ から出る負号と、積分区間の端の入れ替わりの両方を追跡しなければならない。
- $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$ を、$u > 0$ が必要であることに触れずに用いる。
- (iii) において、$\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(a^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ を得たところで止まってしまい、それが J と与えられた積分を用いて書き直せることに気づかない。

STEP のその先へ

定義域（domain）の対称性を利用して積分をそれ自身と関係づけるのは、よく使われる工夫である。これは複素関数論の周回積分（contour integration）や、$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, \mathrm{d}x$ のような積分でも再び現れる。また、(iii) の積分はある一般的な族から生じるものでもある。$\int_0^{\infty} (\lambda + x^2)^{-1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \lambda^{-1/2}$ を λ について微分すると、ただちに同じ答えが得られる（「積分記号下での微分（differentiation under the integral sign）」）。このような操作や、広義積分（improper integral）の扱いがいつ許されるのかは、実解析（real analysis）の講義で説明される。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。