解答例

STEP II 2014、第 3 問

純粋数学 • 接線と包絡線

> **STEP II 2014、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q3

鍵となる考え方

点 P における接線（tangent）は単なる直線であり、傾き（gradient）は y'、y 切片（intercept）は $y - xy'$ である。したがって小問 (i) を用いると、距離が一定という性質は微分方程式（differential equation）に書き換えられる。この方程式を微分すると因数 y'' が現れ、積をゼロにする二通りの方法から二つの曲線族が得られる。すなわち直線（$y'' = 0$）と円である。小問 (iii) では、これらの断片をなめらかにつなぎ合わせることが求められる。

解答

小問 (i)

$m = 0$ のとき直線は $y = c$ であり、距離は明らかに c であるから、$m \neq 0$ と仮定する。直線は y 軸と $A = (0, c)$ で交わり、x 軸と鋭角 θ をなす。ここで $\tan\theta = |m|$ である。O から直線に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を N とする。直角三角形 ONA において、A における直線と y 軸のなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ であるから、角 AON は θ であり、

$$ON = OA\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = c(m^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

（同じ値は、$x^2 + (mx + c)^2$ を最小化しても得られる。これは x の 2 次式であり、$x = -\frac{mc}{1+m^2}$ で最小値 $\frac{c^2}{1+m^2}$ をとる。）

$c < 0$ のときは、原点に関して対称移動すると、O からの距離を変えずに直線は $y = mx + |c|$ に移る。したがって一般に距離は $|c|(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}$ である。

小問 (ii)

$P=(x,y)$ における接線は傾き y' をもち P を通るので、座標 (X,Y) を用いたその方程式は

$$Y = y'X + (y - xy').$$

である。これは小問 (i) の形の直線で、$m = y'$、$c = y - xy'$ である（仮定により鉛直ではない）。したがって O からの距離は

$$a = \frac{|y - xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

であり、2 乗すると

$$(y - xy')^2 = a^2(1 + (y')^2). \qquad (*)$$

微分する。ここで a は定数であり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y - xy') = y' - y' - xy'' = -xy''$ である。よって $(*)$ を微分すると

$$2(y - xy')(-xy'') = 2a^2y'y'', \qquad \text{すなわち、} \qquad y''[\,x(y - xy') + a^2y'\,] = 0.$$

考えてみよう 積がゼロであることから、曲線についてどのようにして二つの場合に分かれるのか？

各点において、$y'' = 0$ であるか、または括弧の中がゼロである。曲線のうち $y'' = 0$ となる部分では曲線はまっすぐであり、$y'' \neq 0$ となる部分では括弧の中がゼロでなければならない。二つの場合を順に考える。（$a > 0$ と仮定する。$a = 0$ ならばすべての接線が O を通り、C は単に原点を通る直線である。）

場合 1：$y'' = 0$ のとき。このとき $y' = m$ は定数であり、定数 m、k を用いて $y = mx + k$ と書ける。$y - xy' = k$ であることに注意して $(*)$ に代入すると $k^2 = a^2(1 + m^2)$ となるので、

$$y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

場合 2：括弧の中がゼロのとき。このとき $xy - x^2y' + a^2y' = 0$ であるから、

$$(x^2 - a^2)\,y' = xy.$$

まず $x^2 \neq a^2$ である。実際、$x = \pm a$ ならば $xy = 0$ より $y = 0$ となり、$(*)$ は $a^2(y')^2 = a^2(1 + (y')^2)$ となるが、これは不可能である。よって割り算ができて、

$$y' = \frac{xy}{x^2 - a^2}, \qquad y - xy' = \frac{y(x^2 - a^2) - x^2y}{x^2 - a^2} = \frac{-a^2y}{x^2 - a^2}.$$

両方を $(*)$ に代入し、全体に $(x^2-a^2)^2/a^2$ を掛けると、

$$\begin{aligned} & a^2y^2 = (x^2-a^2)^2 + x^2y^2 \\ \iff \quad & y^2(a^2-x^2) = (a^2-x^2)^2 \\ \iff \quad & (a^2-x^2)\,(x^2+y^2-a^2) = 0. \end{aligned}$$

$a^2-x^2 \neq 0$ であるから、$x^2+y^2=a^2$ が結論される。

以上より、ある m に対して $y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$ であるか、または $x^2+y^2=a^2$ であり、これが示すべきことであった。どちらも実際にこの性質をもつ。直線は小問 (i) より O からの距離が a であり、O を中心とする半径 a の円の接線はすべて O からの距離が a である。

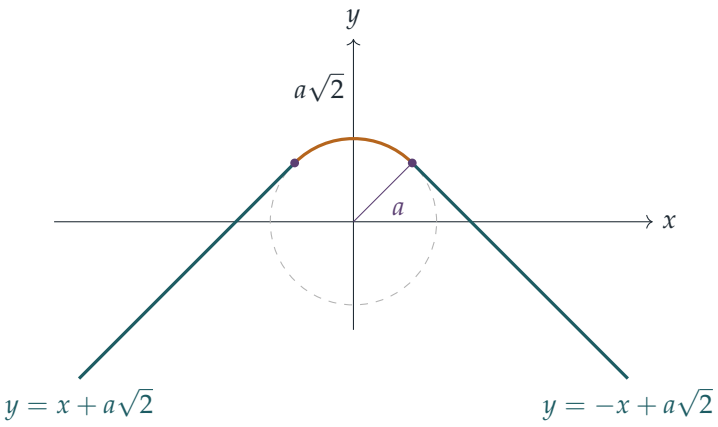
小問 (iii)

直線部分と円弧がつながる点で C は接線をもたなければならないので、そこで直線は円弧と同じ傾きをもつ必要がある。すなわち、各直線は円弧の端点における円の接線である。また、すべての接線は鉛直であってはならないので、円弧は点 $(\pm a, 0)$ に達してはならない。さらに C は x の関数のグラフであるから、円の上半分のみ、または下半分のみを用いる。

例として、$x^2+y^2=a^2$ の円弧のうち、$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ から上側を通って $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ に至る部分をとり、その両端における接線で延長する。

$$y = \begin{cases} x + a\sqrt{2}, & x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{a^2-x^2}, & |x| \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \\ -x + a\sqrt{2}, & x \geq \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

直線は $m = \pm 1$、切片 $a\sqrt{2} = a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$ であり、場合 1 の条件を満たす。$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ において円弧の傾きは $-\frac{x}{y} = \mp 1$ であり直線の傾きと一致するので、傾きはいたるところで連続かつ有限である。



$(\pm a, 0)$ を含まない上半円（または下半円）の任意の円弧を、その両端の接線で延長したものも、同様にうまくいく。

検算

- 小問 (i) で $m = 0$ とすると距離は c となり、$|m| \to \infty$ とすると直線は急になって距離は 0 に近づく。これは $(0, c)$ を通る直線として当然である。
- 円上では $y' = -x/y$ より $y - xy' = a^2/y$ となり、$(*)$ の両辺はともに a^4/y^2 に等しい。
- $a = 1$ の例について、$x = -5$ から $x = 5$ までの 1001 個の点で O から接線までの距離をコンピュータで確かめたところ、すべて 1 であった。たとえば $x = 2$ では接線は $y = -x + \sqrt{2}$ であり、距離は $\sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$ である。

よくある間違い

- 微分した方程式を y'' で割ってしまい、直線解を失う。
- a が定数であることを忘れる、あるいは xy' の微分を $y' + xy''$ ではなく y' としてしまう。
- 小問 (iii) で、直線と円弧を角ができるようにつないでしまう、あるいは両端で接線が鉛直になる半円全体を使ってしまう。

STEP のその先へ

ここでの円は直線族 $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ の**包絡線**（envelope）であり、$(*)$ はクレロー（Clairaut）の方程式 $y = xy' + f(y')$ である。その一般解（general solution）は直線族であり、**特異解**（singular solution）はそれらの包絡線である。y' についての 2 次方程式とみると、$(*)$ の判別式（discriminant）は $4a^2(x^2+y^2-a^2)$ であり、二つの傾きの選択はちょうど円上で一致する。そのため、小問 (iii) のように解をそこでつなぎ合わせることができ、また解の一意性（uniqueness）が成り立たなくなる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、1 階の方程式に対する解の存在と一意性が論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。