解答例

STEP II 2014、第 2 問

純粋数学 • 積分の不等式

> **STEP II 2014、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.7 節「$\pi^2 \leq 10$」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/wirtinger.html

鍵となる考え方

$(*)$ の両辺は、具体的に与えられた f に対しては正確に計算できる積分である。したがって、両端で値が 0 になる関数を一つ選ぶたびに、$(*)$ は π を含む数どうしの不等式（inequality）になる。実質的に選ぶべきものは、$f(0) = f(\pi) = 0$ となるように自由な定数を定めることだけである。端で 0 にならない関数は、ゆっくり変化しながらも大きな値をとりうる。端点での条件が重要なのはこのためである。

解答

小問 (i)

$f(x) = \sin nx$ とすると $f'(x) = n\cos nx$ である。$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ と $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ を用いると、

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi} n^2\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{n^2}{2}\left[x + \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{n^2\pi}{2},$$

となる。ここで、整数 n に対して $\sin 2n\pi = 0$ であることを用いた。$n \geq 1$ より $n^2 \geq 1$ であるから $\frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2}$ となり、$(*)$ が成り立つ（等号が成り立つのはちょうど $n = 1$ のときである）。

反例（counterexamples）。$f(x) = \pi - x$ をとる。これは $f(\pi) = 0$ を満たすが、$f(0) = \pi \neq 0$ である。このとき $f'(x) = -1$ であり、

$$\int_0^\pi (\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}x = \pi.$$

$\pi^2 > 3$ であるから $\frac{\pi^3}{3} > \pi$ となり、$(*)$ は成り立たない。同様に、$f(x) = x$ は $f(0) = 0$ を満たすが $f(\pi) = \pi \neq 0$ であり、同じ二つの積分 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$ を与えるので、やはり $(*)$ は成り立たない。したがって、一方の端点条件が成り立っていても、もう一方の条件を外すことはできない。

小問 (ii)

2 次関数の場合。$f(0) = c = 0$ かつ $f(\pi) = a\pi^2 + b\pi = 0$ が必要であるから、$b = -a\pi$ となり $f(x) = ax(x - \pi)$ である。$a = 0$ とすると $f \equiv 0$ となり、役に立たない不等式 $0 \leq 0$ しか得られないので、$a \neq 0$ とする。f を a 倍すると $(*)$ の両辺はともに a^2 倍されるので、$a = -1$ としてよい：

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad f'(x) = \pi - 2x.$$

$x = \frac{\pi}{2} + u$ と置換すると、両方の積分が対称な形になる：$f = \frac{\pi^2}{4} - u^2$、$f' = -2u$ であり、u は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を動く。$h = \frac{\pi}{2}$ とおくと、

$$\int_0^\pi f^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} \left(h^2 - u^2\right)^2 \mathrm{d}u = 2\left(h^5 - \tfrac{2}{3}h^5 + \tfrac{1}{5}h^5\right) = \frac{16h^5}{15} = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi f'^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} 4u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{8h^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}.$$

よって $(*)$ から $\dfrac{\pi^5}{30} \leq \dfrac{\pi^3}{3}$ が得られ、正の数 $\frac{\pi^3}{30}$ で割ると

$$\pi^2 \leq 10,$$

となって、示すべきことが得られる。

三角関数の場合。今度は $f(0) = q + r$、$f(\pi) = p \sin\frac{\pi}{2} + q\cos\frac{\pi}{2} + r = p + r$ である。これらがともに 0 になるのは、ちょうど $p = q = -r$ のときである。ここでも $r = 0$ とすると $f \equiv 0$ となり、定数倍は影響しないので、$r = -1$ とする：

$$f(x) = \sin\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}x - 1, \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x\right).$$

? **考えてみよう** 交差項でごちゃごちゃにならずに f を 2 乗するにはどうすればよいか。

$s=\sin\frac{1}{2}x$、$c=\cos\frac{1}{2}x$ として、$(s+c)-1$ とまとめる。すると $(s+c)^2=1+2sc=1+\sin x$ であるから、

$$f^2=(s+c)^2-2(s+c)+1=2+\sin x-2\sin\tfrac{1}{2}x-2\cos\tfrac{1}{2}x.$$

$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x=2$、$\int_0^\pi \sin\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=\left[-2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^\pi=2$、$\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=\left[2\sin\frac{1}{2}x\right]_0^\pi=2$ を用いると、

$$\int_0^\pi f^2\,\mathrm{d}x=2\pi+2-4-4=2\pi-6.$$

同様に $(c-s)^2=1-\sin x$ であるから、

$$\int_0^\pi f'^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^\pi(1-\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi-2}{4}.$$

このとき $(*)$ は $2\pi-6\le\frac{1}{4}(\pi-2)$、すなわち $8\pi-24\le\pi-2$ を意味するので、

$$7\pi\le 22,\qquad \text{すなわち}\qquad \pi\le\frac{22}{7}.$$

比較。 2 番目の不等式の両辺を 2 乗すると（両辺とも正である）、

$$\pi^2\le\frac{484}{49}<\frac{490}{49}=10.$$

したがって、三角関数を選んだほうが小さい上界（upper bound）$\pi^2\le\frac{484}{49}\approx 9.878$ を与え、よりよい評価となる。どちらも上界であるから、小さいほうが真の値に近い。

検算

- 真の値は $\pi^2\approx 9.8696$ であり、10 と $\frac{484}{49}\approx 9.8776$ のどちらよりも小さい。当然そうでなければならない。
- 数値で見ると、三角関数の f に対する $(*)$ の両辺は $2\pi-6\approx 0.2832$ と $\frac{1}{4}(\pi-2)\approx 0.2854$ であり、非常に近い。評価 $\pi\le\frac{22}{7}$ がこれほど鋭いのはこのためである。2 次関数の場合、両辺は $\frac{\pi^5}{30}\approx 10.20$ と $\frac{\pi^3}{3}\approx 10.34$ である。
- 小問 (i) では $n=1$ のとき等号が成り立つので、$\sin x$ は $(*)$ の極端な場合である。三角関数の f は形が $\sin x$ に近いが、$x(\pi-x)$ はそれよりやや離れている。どちらの評価がよいかはこれで説明がつく。

よくある間違い

- $f=1$ のように、端点条件を**両方とも**破る反例を選んでしまう。これも正しい反例ではあるが、$\pi-x$ と x はそれ以上のこと、すなわち各条件がそれ単独で必要であることを示している。

- 三角関数の場合に f^2 を積分するとき、$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 2$（0 ではない）であることを忘れる。
- 10 のほうが「きりがよい」からよりよい評価だと言ってしまう。どちらも上界なので、小さいほうがよい評価である。

STEP のその先へ

不等式 $(*)$ はヴィルティンガーの不等式（Wirtinger's inequality）であり、最良の定数 1 は $\sin x$ から得られる。これは、$f(0) = f(\pi) = 0$ のもとでの $-f'' = \lambda f$ の最小固有値（eigenvalue）である。選んだ関数で $(*)$ を試す方法はレイリー・リッツ法（Rayleigh–Ritz method）と呼ばれ、この固有値の上界を常に与える。技術者が振動数（vibration frequency）を見積もる方法の根底にもこの考え方がある。$(*)$ そのものは、フーリエ級数（Fourier series）を用いると鮮やかに証明できる。背後にある解析学（analysis）については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を、固有値の側面については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。