解答例

STEP II 2014、第 11 問

力学 ・ 円運動

STEP II 2014、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q11

鍵となる考え方

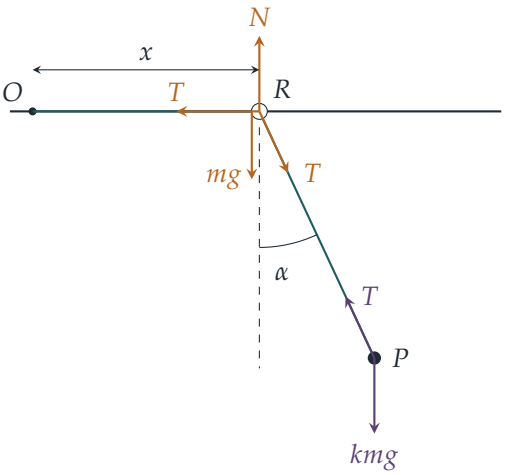
すべては一つの変数 x によって決まる。糸は伸び縮みせず（inextensible）、α は一定であるから、P の位置は x の簡単な関数となり、P の加速度の二つの成分はどちらも $\ddot{x}$ の定数倍になる。こうして運動方程式（equation of motion）が三つ（P について二つ、環について水平方向の一つ）得られるが、未知数は $\ddot{x}$ と T の二つしかない。方程式の数が未知数より多い連立方程式（overdetermined system）は、何か特別なことが成り立つ場合にしか解をもたない。その整合性の条件こそが、α と k を結びつけるのである。

解答

モデル化。環と P は質点、糸は軽く伸び縮みせず、環とレールはなめらかであるとする。環がなめらかなので、張力（tension）T は糸の両側の部分で等しい。O を原点とし、x 軸をレールに沿って O から環へ向かう向きにとり、y 軸を鉛直上向きにとる。

P の座標。糸のうち O から環までの部分はレールに沿っていて長さは x であるから、環から P までの部分の長さは $L-x$ である。この部分は鉛直下向きと角 α をなし、P は環に関して O と反対側に垂れ下がっている（この選び方が正しいことは小問 (i) の最後で示す）。よって

$$P = \left(x + (L-x)\sin\alpha,\ -(L-x)\cos\alpha\right).$$



小問 (i)

α を定数として P の座標を 2 回微分すると

$$\ddot{x}_P = \ddot{x}\,(1-\sin\alpha), \qquad \ddot{y}_P = \ddot{x}\cos\alpha.$$

P にはたらく力は、下向きの重力 kmg と、糸に沿って環の方へ向かう張力 T である。張力の成分は水平方向が $-T\sin\alpha$、鉛直方向が $+T\cos\alpha$ である。

P の鉛直方向： $km\,\ddot{y}_P = T\cos\alpha - kmg$、すなわち

$$km\ddot{x}\cos\alpha = T\cos\alpha - kmg,$$

となり、示すべき式が得られた。

P の水平方向：

$$km\ddot{x}\,(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha. \tag{1}$$

環の水平方向。環は両側から糸の力を受ける。レールに沿った部分は環を力 T で O の方へ引き、P へ垂れ下がる部分は水平成分 $T\sin\alpha$ で環を O から遠ざかる向きに引く。環の重力とレールからの垂直抗力（normal reaction）は鉛直方向である（レールはなめらかである）。よって

$$m\ddot{x} = T\sin\alpha - T = -T(1-\sin\alpha). \tag{2}$$

考えてみよう なぜ P は環に関して O と反対側になければならないのだろうか。

もし P が O の側に垂れ下がっているとすると、その x 座標は $x-(L-x)\sin\alpha$ となり、二つの水平方向の方程式は $km\ddot{x}(1+\sin\alpha) = T\sin\alpha$ と $m\ddot{x} = -T(1+\sin\alpha)$ になる。前

者からは $\ddot{x} \geq 0$、後者からは $\ddot{x} \leq 0$ が従うので、$\ddot{x} = 0$ かつ $T = 0$ である。しかしこのとき鉛直方向の方程式から $0 = -kmg$ となり、これは不可能である。したがってその配置では α を一定に保ったまま運動することはできず、上の座標が正しいものである。

小問 (ii)

まず $T \neq 0$ である。実際、$T = 0$ ならば (2) より $\ddot{x} = 0$ となり、鉛直方向の方程式から $0 = -kmg$ となって矛盾する。

(2) より $m\ddot{x} = -T(1 - \sin\alpha)$ である。これを (1) に代入すると

$$k(-T(1 - \sin\alpha))(1 - \sin\alpha) = -T\sin\alpha.$$

$-T \neq 0$ で割ると

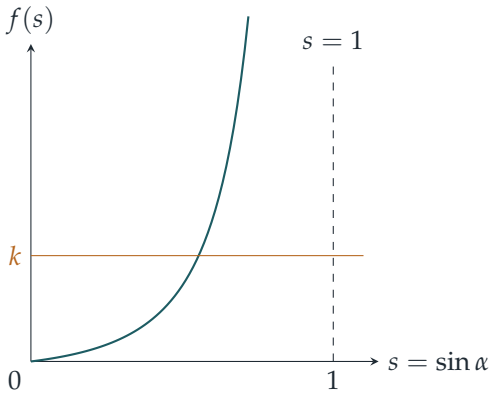
$$\frac{\sin\alpha}{(1 - \sin\alpha)^2} = k,$$

となり、示すべき式が得られた。(α は鋭角なので $0 < \sin\alpha < 1$ であり、$(1 - \sin\alpha)^2$ で割ってよい。)

どんな k も実現できる。$s = \sin\alpha$ とおき、$0 < s < 1$ で $f(s) = \dfrac{s}{(1-s)^2}$ を考える。この範囲はちょうど $\alpha \neq 0$ である鋭角 α 全体に対応する。商の微分法 (quotient rule) により

$$f'(s) = \frac{(1-s)^2 + 2s(1-s)}{(1-s)^4} = \frac{1+s}{(1-s)^3} > 0,$$

であるから、f は狭義単調増加 (strictly increasing) である。また $s \to 0^+$ のとき $f(s) \to 0$、$s \to 1^-$ のとき $f(s) \to \infty$ であり、f は連続である。よって f はすべての正の値をちょうど 1 回ずつとり、各 $k > 0$ に対して条件を満たす鋭角 α がただ一つ存在する。



水平な直線 $y = k$ の高さがどうであっても、この直線は曲線とちょうど 1 回交わる。

小問 (iii)

次に、(2) と鉛直方向の方程式を用いて T を消去する。(2) より $T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}$ である。これを鉛直方向の方程式に代入し、m で割ると

$$k\ddot{x}\cos\alpha = -\frac{\ddot{x}\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - kg \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x}\cos\alpha\left(k + \frac{1}{1-\sin\alpha}\right) = -kg.$$

ここで小問 (ii) を用いて括弧内の k を置き換えると

$$k + \frac{1}{1-\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + (1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{1}{(1-\sin\alpha)^2}.$$

したがって

$$\ddot{x} = -\frac{kg(1-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha} = -\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha} = -g\tan\alpha,$$

となる。ここでもう一度 $k(1-\sin\alpha)^2 = \sin\alpha$ を用いた。これが求める結果である。

おまけとして、$T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha} = \dfrac{mg\tan\alpha}{1-\sin\alpha} > 0$ であるから、モデルが要求するとおり、糸は確かにぴんと張っている。

検算

- $k = 1$ のとき、条件 $s = (1-s)^2$ から $\sin\alpha = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \approx 0.382$ となるので、$\alpha \approx 22.46°$、$\ddot{x} \approx -0.413g$ である。これらを (1)、(2) および鉛直方向の方程式に代入すると、三つともつり合う。
- 二変数（x と糸の角度）の運動全体を数値的にシミュレーションし、この角度から環が動いている状態で始めたところ、角度は 10^{-10} rad 以内で一定に保たれ、環はちょうど $g\tan\alpha$ で減速した。わずかに異なる角度から始めると、角度はただちに変化し始める。したがって α の特別な値は本当に重要である。
- 極限の場合：$k \to 0$（非常に軽い質点）のとき $\alpha \to 0$、$\ddot{x} \to 0$ となる。$k \to \infty$ のとき $\alpha \to 90°$ となり、減速度は限りなく大きくなる。軽い環が重い質点に引っ張られているからである。
- 符号：$\ddot{x} < 0$ であるから、環は常に O の方へ加速している。これは整合的である。環にはたらく水平方向の合力 $-T(1-\sin\alpha)$ は O の方を向いているからである。

よくある間違い

- 環が糸から**両側**の力を受けることを忘れる。レールに沿って O の方へ引く力があるからこそ (2) が成り立つ。

- P の水平方向の加速度を $\ddot{x}$ と書いてしまう。垂れ下がっている部分の長さ $L-x$ も変化し、それが $-\ddot{x}\sin\alpha$ の寄与を生む。
- 微分するときに α を変数として扱う。ここでは α は定数であり、まさにそのことが問題を解けるものにしている。

STEP のその先へ

これは 2 自由度（degrees of freedom）の系（環の位置と糸の角度）であり、この問題は、相対平衡（relative equilibrium）の考え方に沿って、そのうち一方が一定に保たれる特別な解を探している。大学 1 年の講義であれば、x と角度を用いてラグランジアン（Lagrangian）を書き下し、角度一定の運動が可能なのはここで求めたただ一つの α の値に限られることを確かめるだろう。自然に続く問いは、その運動が安定（stable）かどうかである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この種の拘束系をよく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。