解答例

STEP II 2014、第 10 問

力学 ・ 軌道の包絡線

> **STEP II 2014、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.9 節「**安全放物線**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/safety-parabola.html

鍵となる考え方

時間を消去すると、$\sec^2\theta = 1 + \lambda^2$ であるから、軌道（trajectory）の方程式は $\lambda = \tan\theta$ に関する**二次式**（quadratic）になる。点 (x, y) を固定し、その点を通るような発射角が存在するかどうかを問う。これは、λ に関するこの二次方程式が実数解をもつかどうかを問うことと同じであるから、判別式（discriminant）によって到達可能な領域の境界が得られる。最後の小問では、境界の曲線が O を焦点（focus）とする放物線（parabola）であることがわかり、そのおかげで O からの距離がきわめて簡単に求められる。

解答

軌道

物体を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点としてモデル化する。時刻 t において、

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

角は直角より小さいので $\cos\theta \neq 0$ であり、$t = x/(u\cos\theta)$ である。これを代入すると

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}.$$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \lambda^2$ を用いると、直交座標による方程式は

$$\boxed{y = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \lambda^2\right).}$$

与えられた x の真上での最大の高さ Y

u を固定し、$x > 0$ を固定する。このとき y は λ のみの関数であり、次のように書き直せる。

$$\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) = 0.$$

考えてみよう これを y ではなく λ についての方程式と見るのはなぜか。

この x の真上で値 y が実現されるのは、ある発射角がそれを生み出すとき、すなわちこの二次方程式が実数解 λ をもつときであり、かつそのときに限る。したがって判別式は非負でなければならない。

$$x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2u^2}\left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) \geq 0.$$

$x^2 > 0$ で割り、さらに $u^2/(2g) > 0$ を掛けても不等号の向きは変わらないから、

$$\frac{u^2}{2g} \geq \frac{gx^2}{2u^2} + y \iff y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

よって

$$\boxed{Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}}$$

であり、この x の真上で Y より高く上がる軌道は存在しない。

さらに、Y **以下の**すべての値が、$\lambda > 0$ となる正当な発射角によって実現されることも示す必要がある。λ の関数として見ると、y は上に凸な二次関数である。頂点は $\lambda_0 = u^2/(gx) > 0$ にあり、そこで $y = Y$ となる（代入して確かめよ）。$\lambda \geq \lambda_0$ において y は連続かつ減少であり、$\lambda \to \infty$ のとき $y \to -\infty$ である。したがって連続性（continuity）により、$y \leq Y$ を満たすすべての値は、ある $\lambda \geq \lambda_0 > 0$、すなわちある $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対してとられる。ゆえに、求めるとおり y のとる値は区間 $y \leq Y$ 全体となる。（$x = 0$ のときは真上に投げなければならない。このとき y は 0 から $u^2/(2g)$ までの値をとり、これはやはり $Y(0)$ に等しい。）

どちらの向きにも投射してよい場合には、$x < 0$ の場合は鏡像となり、Y は x^2 のみに依存するので同じ公式が成り立つ。

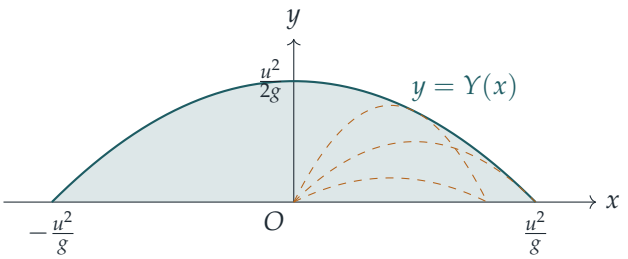
グラフと到達可能な領域

Y のグラフは上に凸な放物線である。頂点は $(0,\, u^2/2g)$ にあり、これは到達可能な最大の高さである。また $x = \pm u^2/g$ で地面と交わり、これは最大の水平到達距離である。個々の軌道はすべてこの曲線の下にあり、$\lambda = \lambda_0$ において一度だけこの曲線に接する。このため、この曲線はしばしば**包絡放物線**（bounding parabola）または**安全放物線**（parabola of safety）とよばれる。

質点は地面に達すると止まる。$\lambda > 0$ かつ $x > 0$ である軌道上の、$y \geq 0$ を満たす点をとる。その軌道は O とその点の間のすべての x において地面より上にあるから、質点は着地する前に確かにその点に到達する。よって到達可能な集合は、次の領域である。

$$0 \leq y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}, \qquad |x| \leq \frac{u^2}{g},$$

これを下図に網掛けで示す。図は u^2/g を単位としており、破線の曲線は 3 本の軌道の例である。



O からの最大距離

到達可能な任意の点 P は、半直線 OP が境界と交わる点を Q とするとき、O から Q への線分上にある。領域は包絡放物線と地面で囲まれており、各半直線に沿って O と境界の間にあるすべての点を含む。したがって $OP \leq OQ$ であり、境界上で距離を最大化すればよい。地面上で最も遠い点までの距離は u^2/g である。曲線部分では $y = Y(x)$ であるから、

$$\begin{aligned} OQ^2 = x^2 + Y^2 &= x^2 + \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{gx^2}{2u^2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{gx^2}{2u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

よって $OQ = \dfrac{u^2}{2g} + \dfrac{gx^2}{2u^2} = \dfrac{u^2}{g} - Y$ である。言い換えると、O からの距離は直線 $y = u^2/g$ から下向きに測った距離に等しい。すなわち O は包絡放物線の焦点であり、$y = u^2/g$ はその準線（directrix）である。この距離は Y が最小のときに最大となり、曲線の到

達可能な部分における Y の最小値は $x = \pm u^2/g$ における $Y = 0$ である。ゆえに、投射物が到達できる O からの最大距離は

$$\boxed{\frac{u^2}{g}},$$

であり、これは $\theta = \frac{\pi}{4}$ で達成される最大の水平到達距離に等しい。境界上で高さ $y > 0$ にある点はどれも、ちょうど y だけ O に近い。

検算

- $x = 0$ とおくと $Y = u^2/(2g)$ となり、これは真上に投げたときに達する高さである（$v^2 = u^2 - 2gh$ より）。$Y = 0$ とおくと $x = u^2/g$ となり、これはおなじみの最大到達距離 $u^2 \sin 2\theta/g$ の $\theta = \frac{\pi}{4}$ における値である。
- $u^2/g = 10$ とする（たとえば $g = 9.8$ として $u = \sqrt{98}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）。$x = 4$ において公式は $Y = 5 - 0.8 = 4.2$ を与え、これは $\lambda_0 = 10/4 = 2.5$ で達成される。実際、$2.5 \cdot 4 - \frac{1}{20} \cdot 16 \cdot 7.25 = 10 - 5.8 = 4.2$ である。
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ に対して多数の発射角と時刻にわたって計算機で探索したところ、O から最も遠い点は地面上にあり、その距離は $10.204\,\mathrm{m} = u^2/g$ であった。

よくある間違い

- 判別式のところで止めてしまうこと。判別式は $y \le Y$ が**必要**であることを示すが、問題はさらに、そのような値がすべて地面より上で正当な発射角によって**実現される**ことも求めている。
- 地面より下の点も含めて、$y = Y$ の下の領域全体を網掛けしてしまうこと。質点は着地すると止まるので、到達可能な集合はさらに $y \ge 0$ を満たす。
- 最も遠い点は安全放物線の頂点であると思い込むこと。その点は O から $u^2/(2g)$ しか離れておらず、これは到達距離の半分である。

STEP のその先へ

包絡放物線は軌道の族の**包絡線**（envelope）、すなわち族のすべての曲線に接する曲線である。包絡線を求める標準的な方法の一つは、$F(x, y, \lambda) = 0$ と $\partial F/\partial\lambda = 0$ からパラメータを消去することであり、これはまさに本問で用いた重解条件にほかならない。エネルギーとの関連もある。すべての軌道は同じ準線、すなわち直線

$y = u^2/(2g)$ をもつ。これは、運動エネルギー（kinetic energy）がすべて位置エネルギー（potential energy）に変わったときに達する高さである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年生の水準で放物運動とエネルギーを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。