解答例

STEP II 2014、第 1 問

純粋数学 • 三角形の幾何と 2 次方程式

> **STEP II 2014、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q1

鍵となる考え方

A から B へ、折れ線 $A \to P \to Q \to B$ に沿って歩く。3 本の線分の長さはすべて x であり、合わせてちょうど 1 の水平距離を進み、正味の高さ 0 だけ上らなければならない。水平方向と鉛直方向に分解する（resolving）と $x\cos\theta$ と $x\sin\theta$ が得られ、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ によって未知の角を消去できる。その後はすべて x の二次方程式（quadratic）とその判別式（discriminant）の話である。

解答

A を原点に、B を $(1,0)$ に置き、C は AB の上側にあるとする。P は A から C を通る半直線（ray）上で A から距離 x の点であり、Q は B から C を通る半直線上で B から距離 x の点であるから、

$$P = (x\cos\alpha,\ x\sin\alpha), \qquad Q = (1 - x\cos\beta,\ x\sin\beta).$$

小問 (i)

水平方向。$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{QB}$ の水平成分は $x\cos\alpha$、$x\cos\theta$、$x\cos\beta$ であり、その和は $AB = 1$ に等しい。よって

$$x\cos\theta = 1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,$$

となり、これが最初の結果である。（座標で言えば、これは Q と P の x 座標の差である。）

鉛直方向。P の高さは $x\sin\alpha$、Q の高さは $x\sin\beta$ であるから、

$$x\sin\theta = x\sin\beta - x\sin\alpha.$$

（これは決して負にならない。三角形の内角の和は 180° 未満であるから $\alpha \le \beta < 180^\circ - \alpha$ であり、この区間では $\sin\beta \ge \sin\alpha$ となる。よって Q が P より低くなることはない。）

θ の消去。両辺を 2 乗して加え、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いると、

$$x^2 = (1 - x(\cos\alpha + \cos\beta))^2 + x^2(\sin\beta - \sin\alpha)^2.$$

右辺を展開すると、x^2 の係数は

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &\quad + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

となる。よって $x^2 = 1 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + (2 + 2\cos(\alpha + \beta))x^2$ である。x^2 を右辺に移すと

$$(1 + 2\cos(\alpha + \beta))x^2 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + 1 = 0, \qquad (*)$$

となり、題意が示された。

P と Q が辺の延長上にある場合。P が AC の延長（produced）上にあっても、A から C を通る半直線上で A から距離 x の点であることに変わりはないので、その座標はやはり $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$ である。同様に Q もやはり $(1 - x\cos\beta, x\sin\beta)$ である。上の導出はこれ以外に何も用いていない。P から Q への変位は

$$(1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,\ x\sin\beta - x\sin\alpha),$$

であり、$PQ^2 = x^2$ からまったく同じ方程式 $(*)$ が得られる。（このとき x は AC や BC を超えることがあり、$1 - x\cos\alpha - x\cos\beta$ は負になりうるので、θ は鈍角になりうる。しかし 2 乗すると符号は消えるので、これは問題にならない。）

小問 (ii)

方程式 $(*)$ が一次方程式になるのは、ちょうど $1 + 2\cos(\alpha + \beta) = 0$、すなわち $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$ のときである。$0 < \alpha + \beta < 180^\circ$ であるから、可能性は

$$\alpha + \beta = 120^\circ.$$

のみである。

それ以外のとき $(*)$ は真の二次方程式であり、その判別式の 4 分の 1 は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\Delta &= (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - (1 + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - (\sin\beta - \sin\alpha)^2,\end{aligned}$$

となる。ここで $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ と $\cos^2\beta - 1 = -\sin^2\beta$ を用いた。

考えてみよう なぜ $(\sin\beta-\sin\alpha)^2$ は 1 より小さくなければならないのか？

どちらの角も 0° と 180° の間に（両端を含まずに）あるので、$0 < \sin\alpha \le 1$ かつ $0 < \sin\beta \le 1$ である。$(0,1]$ に属する 2 つの数の差は、-1 より大きく 1 より小さい。したがって $(\sin\beta-\sin\alpha)^2 < 1$ であるから $\Delta > 0$ となり、$(*)$ は相異なる 2 つの実数解をもつ。

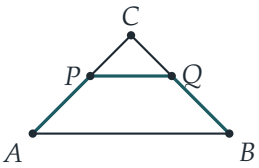
小問 (iii)

(a) $\alpha = \beta = 45^\circ$。このとき $\cos(\alpha+\beta) = \cos 90^\circ = 0$、$\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$ であるから、$(*)$ は

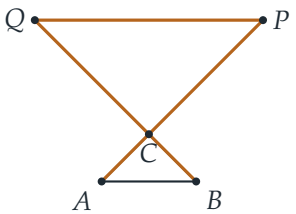
$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0, \qquad x = \sqrt{2} \pm 1.$$

となる。この三角形は直角二等辺三角形（right-angled isosceles triangle）であり、$C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$、$AC = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ である。

- $x = \sqrt{2}-1 \approx 0.414 < AC$：$P$ と Q は辺上にあり、$P = (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}})$、$Q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ である。対称性より PQ は AB に平行であるから、$\theta = 0$ である。確認：$PQ = \sqrt{2}-1 = x$。
- $x = \sqrt{2}+1 \approx 2.414 > AC$：$P$ と Q はそれぞれ AC の延長上と BC の延長上にあり、$P = (1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}})$、$Q = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}})$ である。延長した 2 直線は C で交差しているので、今度は P が Q の**右側**にある。PQ はやはり水平で、長さは $1+\sqrt{2} = x$ である。



$x = \sqrt{2}-1$



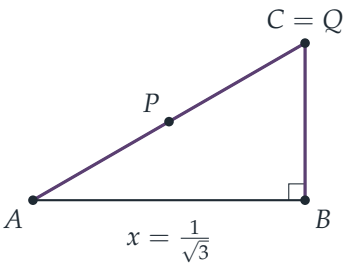
$x = \sqrt{2}+1$

(b) $\alpha = 30^\circ$、$\beta = 90^\circ$。このとき $\alpha+\beta = 120^\circ$ であるから、これは小問 (ii) の一次方程式の場合である。$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、$(*)$ は

$$-\sqrt{3}\,x + 1 = 0, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

となる。この三角形は B で直角であり、$BC = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$、$AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。よって $QB = BC$ は Q が C **そのもの**であることを意味し、$AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}AC$ より P は AC

の中点（midpoint）にある。すると $PQ = PC = \frac{1}{\sqrt{3}} = x$ となり、確かに条件を満たす。可能性はこれだけである。



2 つ目の解はどこへ行ったのだろうか。$\alpha + \beta = 120^\circ$ のとき、直線 AC と BC は 60° で交わる。すると x が非常に大きいとき、それらの直線上の遠く離れた点 P と Q は、ほぼちょうど距離 x だけ離れており、C とともにほぼ正三角形をなす。$\alpha + \beta \to 120^\circ$ とすると、二次方程式の一方の解は無限大へと逃げていく。

検算

- (a) では $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ であり、解の積 $1/(1+2\cos 90^\circ) = 1$ と一致する。
- 適当な三角形、たとえば $\alpha = 40^\circ$、$\beta = 70^\circ$ について $(*)$ を解き、P と Q を配置して PQ を測ると、どちらの解についても x に等しくなる。多数のランダムな三角形についてコンピュータで確かめたところ、約 10^{-10} の精度で一致した。
- (b) では $x = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$ はちょうど BC に等しく、AC の中点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ は $C = (1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ から距離 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の位置にある。

よくある間違い

- $\cos\beta$ の項の符号を誤る。$\overrightarrow{QB}$ は B **に向かう**ので、Q が B の左側にあっても、その水平成分は $+x\cos\beta$ である。
- 小問 (ii) で $\alpha + \beta = 240^\circ$ を許してしまう。三角形の内角の和は 180° 未満である。
- (b) で、最高次の係数（leading coefficient）がゼロであるのに解の公式（quadratic formula）を使おうとしたり、解が存在しないと結論したりする。

STEP のその先へ

閉じたベクトルの多角形を成分に分解し、$\cos^2 + \sin^2 = 1$ で角を消去するのは、運動学（kinematics）やリンク機構（linkage）の問題における標準的な手法である。今回の折れ線は単純な 3 節リンク機構にほかならない。二次方程式が一次方程式になるときに「無限遠へ逃げる」解は、射影幾何学（projective geometry）を初めて垣間見る機会である。射影幾何学では平行線は無限遠点（point at infinity）で交わり、それらも数に入れれば二次の方程式はつねに 2 つの解をもつ。コクセター（Coxeter）と Greitzer による *Geometry Revisited* は、このレベルで古典幾何学に入門するための素晴らしい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。