解答例

STEP I 2014、第 9 問

力学 ・ 水平方向の力を受ける放物運動

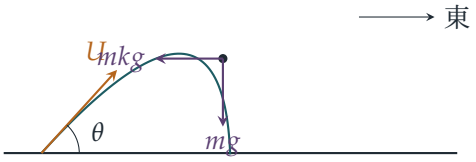
> **STEP I 2014、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q9

鍵となる考え方

2 つの力はどちらも一定なので、各方向の加速度（acceleration）は一定であり、通常の放物運動（projectile motion）とまったく同じように水平方向と鉛直方向の運動を別々に扱うことができる。鉛直方向の運動は西向きの力の影響をまったく受けない。新しい点は、水平方向の速度が一定の割合で減少し続けるため、粒子はある瞬間に東への移動をやめ、その後は西へ戻っていくことである。軌道全体の形は、その瞬間が最高点や着地と比べて**いつ**訪れるかによって決まる。

解答

粒子を鉛直面内を運動する質点（point mass）とみなし、重力と与えられた水平方向の力以外には力がはたらかないとする。東向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、投射点を原点とする。



時刻 T_H と T_L

各方向についてニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を書き、m で割ると

$$\ddot{x} = -kg, \qquad \ddot{y} = -g.$$

を得る。初速度は $(U\cos\theta,\, U\sin\theta)$ であるから、2 回積分して

$$\dot{x} = U\cos\theta - kgt, \qquad x = Ut\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgt^2,$$
$$\dot{y} = U\sin\theta - gt, \qquad y = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

となる。最高点に達するのは $\dot{y} = 0$ のときであり、粒子が着地するのは $t > 0$ で $y = 0$ となるときである：

$$\boxed{T_H = \frac{U\sin\theta}{g}, \qquad T_L = \frac{2U\sin\theta}{g}.}$$

西向きの力には鉛直成分がないので、これらは西向きの力がない場合と同じである。

T の意味

与えられた時刻 $T = \dfrac{U\cos\theta}{kg}$ は、ちょうど $\dot{x} = 0$ となる時刻である。T より前には粒子は東へ動いており、T より後には西へ動く。したがって、時刻 T に粒子がまだ空中にあれば、それは粒子が**最も東に**位置する瞬間である。3 つの時刻を比べると

$$\frac{T_H}{T} = \frac{U\sin\theta}{g}\cdot\frac{kg}{U\cos\theta} = k\tan\theta, \qquad \frac{T_L}{T} = 2k\tan\theta.$$

となる。粒子の着地位置も知っておくと役に立つ：

$$x(T_L) = T_L\left(U\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgT_L\right) = \frac{2U^2\sin\theta}{g}(\cos\theta - k\sin\theta) = \frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta).$$

これは $k\tan\theta < 1$ ならば正（出発点より東）、$k\tan\theta > 1$ ならば負（西）である。

? **考えてみよう** 軌道はもはや対称ではない。では、実際にはどのような形をしているのだろうか？

加速度 $(-kg, -g)$ は一定なので、軌道はやはり放物線（parabola）であるが、その軸は傾いている。すなわち、西寄りの下向きにはたらく大きさ $g\sqrt{1+k^2}$ の「重力」のもとで得られる放物線である。最高点はもはや放物線の頂点ではなく、以下の 3 つの場合は、最も東の点（時刻 T）がどこに来るかについてのものである。

3 つの場合

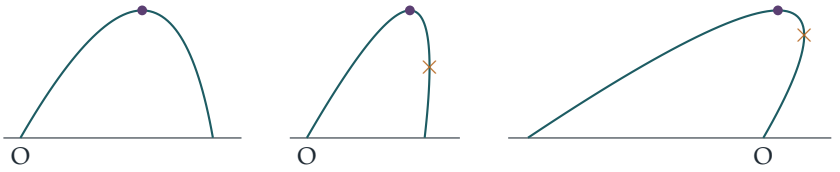
$k\tan\theta < \frac{1}{2}$ の場合。このとき $T_H < T_L < T$ である。粒子は東向きの速度がなくなる前に着地するので、終始東へ動き続ける。軌道は通常の放物運動の軌道に似ており、最高点まで上昇した後、水平方向の速さが減り続けるため、上るときよりも急な角度で落ちてくる。着地点は出発点より東である。

$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$ の場合。このとき $T_H < T < T_L$ である。粒子はまだ東へ動いている間に最高点を通過し、下降しながら時刻 T まで東へ進み続ける。時刻 T には速度は鉛直

下向きとなり、その後、着地する前に西へ巻き戻るように曲がる。$k\tan\theta < 1$ であるから着地点はやはり出発点より東であるが、最も東の点よりは西である。

$k\tan\theta > 1$ の場合。このとき $T < T_H$ である。粒子がまだ上昇している間に東向きの運動が止まり、その瞬間、粒子は鉛直上向きに動いている。粒子はすでに西へ動きながら最高点に達し、投射点より**西**に着地する。

下の図は、$\theta = 60°$ とし、U と g を共通にした 3 つの場合を示したもので、それぞれ $k\tan\theta \approx 0.35$、0.6、1.8 である。点は時刻 T_H における最高点、× 印は時刻 T における最も東の点を表し、O は投射点である。



$k\tan\theta < \frac{1}{2}$　　$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$　　$k\tan\theta > 1$

$k\tan\theta = 1$ の場合

このとき $T = T_H$ であるから、最高点において速度の**両方の**成分が同時に 0 となり、粒子は一瞬静止する。また $x(T_L) = 0$ であるから、粒子は投射点に戻って着地する。

実は、この運動は直線上の運動である。$\tan\theta = 1/k$ のとき、初速度 $U(\cos\theta, \sin\theta)$ は $(k, 1)$ の正の定数倍であり、一方、加速度 $(-kg, -g) = -g(k, 1)$ はちょうど逆向きである。加速度が一定で速度と正反対の向きをもつ粒子は直線上を動く。すなわち粒子は、大きさ $g\sqrt{1+k^2}$ で減速しながら投射の方向の直線を上っていき、時刻 T_H に止まり、同じ直線をまっすぐ滑り戻って、時刻 $T_L = 2T_H$ に出発点に着地する。このことは運動方程式からも確かめられる。$k = \cot\theta$ とすると

$$x\tan\theta = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2 = y \quad \text{任意の} t,$$

が成り立つので、粒子は直線 $y = x\tan\theta$ から決して離れない。

検算

- $k \to 0$ とすると $T \to \infty$ となるので、常に 1 つ目の場合にあたり、$x(T_L)$ はおなじみの水平到達距離 $U^2\sin 2\theta/g$ になる。
- 着地位置 $\frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta)$ はちょうど $k\tan\theta = 1$ で符号が変わり、2 つ目と 3 つ目の場合の境界と一致する。
- $U = g = 1$、$\theta = 60°$、$k = 0.45$ とすると、粒子は $x \approx 0.191$ に着地するが、$T_H \approx 0.87$ と $T_L \approx 1.73$ の間の時刻 $T \approx 1.11$ に $x = \frac{\cos^2\theta}{2k} \approx 0.278$ に達するので、確かに着地

前に引き返している。運動を一歩ずつ数値積分すると、3 つの時刻と着地点のすべてが一致する。

よくある間違い

- 西向きの力が鉛直方向の運動を変えるとしてしまう：T_H と T_L には k はまったく含まれない。
- 最高点が軌道の「真ん中」だと思い込む。水平方向の力があると軌道は傾いた放物線になるので、最高点と最も東の点は異なる。
- 2 つ目の場合を、粒子が出発点より西に着地するかのように描いてしまう：粒子は引き返すが、$k\tan\theta < 1$ であるから出発点より西に戻るほどではない。

STEP のその先へ

任意の向きの一定の加速度は、常に放物線を生む。ここでは実質的な重力が単に傾いているだけであり、座標軸を回転させてその向きにそろえれば、問題は通常の放物運動に戻る。力に適した座標を選ぶというこの考え方は、大学 1 年の力学の中心をなすものであり、一様な電場中の荷電粒子もまさにこのように振る舞うという話題も同様である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これらの考え方が丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。