解答例

STEP I 2014、第 8 問

純粋数学 • 直線族の包絡線

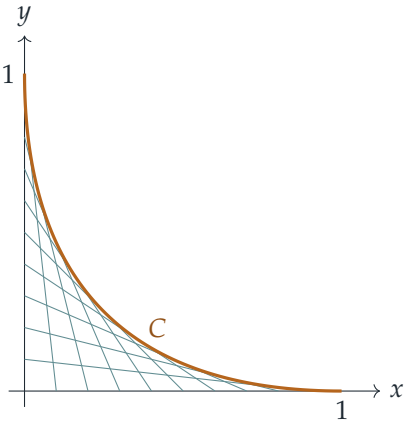
STEP I 2014、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s1-q8

鍵となる考え方

各直線を切片形（intercept form）$\frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1$ で表す。すると 2 直線の交点は連立一次方程式からただちに求まり、a と b について対称な形で得られる。$b\to a$ とすると、直線がその「隣」の直線と交わる点が得られ、これらの点はすべての直線 L_a が接する曲線を描く。曲線 C はこの直線族の**包絡線**（envelope）であり、小問 (iii) はこのことを逆の方向から確かめるものである。



解答

$(a,0)$ と $(0,1-a)$ を通る直線の切片は a と $1-a$ であるから、

$$L_a:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1,\qquad \text{すなわち}\qquad (1-a)x+ay=a(1-a).$$

小問 (i)

次の連立方程式を解く。

$$(1-a)x + ay = a(1-a),$$
$$(1-b)x + by = b(1-b).$$

y を消去するために、第 1 式に b を、第 2 式に a を掛けて辺々引くと、

$$[b(1-a) - a(1-b)]x = ab(1-a) - ab(1-b), \qquad \text{すなわち} \qquad (b-a)x = ab(b-a).$$

$a \neq b$ であるから $b-a$ で割ることができ、$x = ab$ を得る。これを第 1 式に代入すると、

$$ay = a(1-a) - (1-a)ab = a(1-a)(1-b),$$

となり、$a \neq 0$ であるから $y = (1-a)(1-b)$ である。よって L_a と L_b の交点は

$$(ab,\ (1-a)(1-b)).$$

(当然そうなるべきとおり、答えは a と b について対称である。この点が L_b 上にもあることも確かめられる：$(1-b)ab + b(1-a)(1-b) = b(1-b)(a+1-a) = b(1-b)$。)

小問 (ii)

両座標はともに b の多項式であるから連続であり、$b \to a$ のときの極限（limit）は単に $b = a$ における値である：

$$(x, y) = (a^2,\ (1-a)^2).$$

$0 < a < 1$ より $0 < x = a^2 < 1$ であり、$a > 0$ であるから正の平方根をとって $\sqrt{x} = a$ となる。したがって

$$y = (1-a)^2 = (1-\sqrt{x})^2,$$

となり、極限の点は求めるとおり C 上にある。

小問 (iii)

C 上の任意の点をとる。その x 座標は $(0,1)$ に属するので、$t = \sqrt{x} \in (0,1)$ として t^2 と書くことができ、その点は $(t^2, (1-t)^2)$ である。

$y = (1-\sqrt{x})^2$ を連鎖律（chain rule）で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

であり、$x = t^2$ ではこれは $-\frac{1-t}{t}$ となる。この点における接線（tangent）は

$$y - (1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}\,(x - t^2).$$

考えてみよう この直線が L_a のひとつであることは、どうすればわかるだろうか？

直線 L_a は 2 つの切片によって決まり、それらは a と $1-a$ でなければならない。そこで接線の切片を求める。

- $y=0$ とおくと：$-(1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}(x-t^2)$。$1-t \neq 0$ であるから約分して $x-t^2=t(1-t)$ を得るので、$x=t$ である。
- $x=0$ とおくと：$y=(1-t)^2+\frac{1-t}{t}t^2=(1-t)^2+t(1-t)=1-t$。

よって接線は $0<t<1$ として $(t,0)$ と $(0,1-t)$ を通り、まさに L_t である。C のすべての点はある $t\in(0,1)$ から得られるので、C のすべての接線は L_a の形をしている（接点において $a=\sqrt{x}$）。以上で証明が完了する。

$(a^2,(1-a)^2)$ における接線は L_a であり、この点はちょうど小問 (ii) で L_a から得られた点であることに注意しよう。すなわち、各直線は自身の極限の交点において C に接している。

検算

- $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}$ のとき、小問 (i) から $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$ が得られる。$L_{1/2}$ 上：$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$。$L_{1/3}$ 上：$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$。
- $x=\frac{1}{4}$ において曲線は $y=\frac{1}{4}$、傾き -1 であるから、接線は $x+y=\frac{1}{2}$ であり、これは $\left(\frac{1}{2},0\right)$ と $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ を通る $L_{1/2}$ である。
- 曲線そのものは x と y について対称な放物線（parabola）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の一部であり、直線族の対称性 $a\leftrightarrow 1-a$ と一致している。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $\sqrt{x}=a$ の根拠を述べ忘れること。これには $a>0$ が必要であり、それは問題で与えられている。
- 小問 (iii) で、L_a が C に接することだけを示してしまうこと。問題が求めているのはその逆である：C の任意の接線から出発して、それがある L_a であることを示さなければならない。

STEP のその先へ

曲線 C は直線族 L_a の**包絡線**、すなわちそのすべての直線に接する曲線である。一般に、曲線族 $F(x,y,a)=0$ の包絡線は、$F=0$ と $\partial F/\partial a=0$ から a を消去することで求められる。これは小問 (ii) における「$b\to a$ とする」極限の微分法による言い換えである。包絡線は光学において火線（caustic）として現れ、たとえばコーヒーカップの中に見える明るい光の曲線がそれである。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。