解答例

STEP I 2014、第 7 問

純粋数学 • 三角形とベクトル

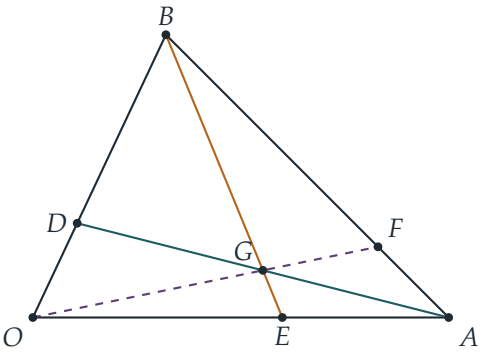
STEP I 2014、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s1-q7

鍵となる考え方

すべての点を **a** と **b** の一次結合（linear combination）で表す。既知の 2 点を通る直線上の点は、1 つのパラメータ（parameter）を含むベクトル方程式（vector equation）で表せるので、G は 2 本の直線のそれぞれから 1 通りずつ、合わせて 2 通りに表せる。**a** と **b** は平行でない（三角形が退化（degenerate）していない）ので係数を比較（comparing coefficients）してよく、その結果、2 つのパラメータについての簡単な方程式が 2 つ得られる。



解答

まず D と E の位置を求める。$BD = r\,DO$ であるから、点 D は O から B へ向かって全体の $\frac{1}{1+r}$ だけ進んだ点である。$OE = s\,EA$ であるから、点 E は O から A へ向かって

全体の $\frac{s}{1+s}$ だけ進んだ点である。よって

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{e} = \frac{s}{1+s}\,\mathbf{a}.$$

小問 (i)

直線 AD 上の一般の点は

$$\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{d} - \mathbf{a}) = (1-\lambda)\,\mathbf{a} + \frac{\lambda}{1+r}\,\mathbf{b},$$

であり、直線 BE 上の一般の点は

$$\mathbf{b} + \mu(\mathbf{e} - \mathbf{b}) = \frac{\mu s}{1+s}\,\mathbf{a} + (1-\mu)\,\mathbf{b}.$$

である。G においてこれらは等しい。

考えてみよう なぜ $\mathbf{a}$ の係数どうし、$\mathbf{b}$ の係数どうしをそれぞれ別々に等しいとおいてよいのだろうか。

O、A、B は本当の三角形をなすので、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は零ベクトルでなく、互いに平行でもない。もし $\alpha \neq \alpha'$ で $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \alpha'\mathbf{a} + \beta'\mathbf{b}$ が成り立つとすると、$\mathbf{a}$ は $\mathbf{b}$ の実数倍となってしまい、これは不可能である。よって

$$1 - \lambda = \frac{\mu s}{1+s}, \qquad \frac{\lambda}{1+r} = 1 - \mu.$$

第 2 式から $\lambda = (1+r)(1-\mu)$ が得られる。これを第 1 式に代入すると

$$\begin{aligned} 1 - (1+r)(1-\mu) &= \frac{\mu s}{1+s} \\ \mu\left[(1+r) - \frac{s}{1+s}\right] &= r \\ \mu\,\frac{(1+r)(1+s) - s}{1+s} &= r \\ \mu\,\frac{1+r+rs}{1+s} &= r, \end{aligned}$$

となるので

$$\mu = \frac{r(1+s)}{1+r+rs}.$$

である。$r, s > 0$ より $1 + r + rs > 0$ であるから、この割り算は許される。この μ の値を BE の式に代入すると、$\mathbf{a}$ の係数は

$$\frac{\mu s}{1+s} = \frac{rs}{1+r+rs},$$

であり、$\mathbf{b}$ の係数は

$$1 - \mu = \frac{1+r+rs-r-rs}{1+r+rs} = \frac{1}{1+r+rs}.$$

である。したがって

$$\mathbf{g} = \frac{rs}{1+r+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+r+rs}\,\mathbf{b},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

直線 OG は原点を通るので、その上の点はすべて $\mathbf{g}$ の実数倍 $k\mathbf{g}$ で表される：

$$k\mathbf{g} = \frac{k}{1+r+rs}\,(rs\,\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

直線 AB は点 $(1-\nu)\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$ 全体からなるので、点 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ が直線 AB 上にあるのは $\alpha + \beta = 1$ のとき、かつそのときに限る。よって F では $k(rs+1) = 1+r+rs$ でなければならず、

$$\mathbf{f} = \frac{rs}{1+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+rs}\,\mathbf{b}.$$

となる。一方、$AF = t\,FB$ は、F が A から B へ向かって全体の $\frac{t}{1+t}$ だけ進んだ点であることを意味する：

$$\mathbf{f} = \frac{1}{1+t}\,\mathbf{a} + \frac{t}{1+t}\,\mathbf{b}.$$

$\mathbf{a}$ の係数を比較する（先ほどと同じ理由で許される）と $1+t = \dfrac{1+rs}{rs}$ となるので

$$t = \frac{1}{rs}.$$

である。$\mathbf{b}$ の係数も一致している：$\dfrac{t}{1+t} = \dfrac{1/(rs)}{(1+rs)/(rs)} = \dfrac{1}{1+rs}$。

検算

- **中線**。$r = s = 1$ のとき、D と E は中点であるから、G は重心（centroid）になるはずである。公式から $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ が得られ、これは正しい。また $t = 1$ であるから F は AB の中点であり、3 本の中線（median）は 1 点で交わる（concurrent）ので、確かにそうなるべきである。
- **チェバの定理**。答えは $r \cdot s \cdot t = 1$、すなわち $\dfrac{BD}{DO} \cdot \dfrac{OE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$ を述べている。これは 1 点で交わる直線 AD、BE、OF に対するチェバの定理（Ceva's theorem）そのものである。
- **数値例**。$\mathbf{a} = (5,0)$、$\mathbf{b} = (0,5)$、$r = 2$、$s = 3$ とする。このとき $D = (0, \frac{5}{3})$、$E = (\frac{15}{4}, 0)$ であり、公式から $G = (\frac{30}{9}, \frac{5}{9}) = (\frac{10}{3}, \frac{5}{9})$ が得られる。この点は方程式 $x + 3y = 5$ で表される AD 上にあり、方程式 $4x + 3y = 15$ で表される BE 上にもある。直線 OG

は $x+y=5$ と $F=(\frac{30}{7},\frac{5}{7})$ で交わり、$\overrightarrow{AF}=(-\frac{5}{7},\frac{5}{7})$、$\overrightarrow{FB}=(-\frac{30}{7},\frac{30}{7})$ であるから $AF:FB=1:6$ となり、$t=\frac{1}{6}=\frac{1}{rs}$ を得る。さらに、2000 個の無作為な三角形と比について、厳密な有理数演算を用いたコンピュータ計算でも公式が確かめられている。

よくある間違い

- 比を逆に取ってしまう：$BD=r\,DO$ のとき、D は O から B へ向かって全体の $\frac{1}{1+r}$ の位置にあり、$\frac{r}{1+r}$ ではない。
- 係数比較が正当である理由を述べずに比較してしまう：そのためには **a** と **b** が平行でないことが必要である。
- 小問 (ii) で **g** の実数倍を考えるのを忘れる：G 自身は AB 上にはない。その係数の和は 1 より小さいからである。

STEP のその先へ

f の係数のように和が 1 になる係数は**重心座標**（barycentric coordinates）である。重心座標は点を頂点における重みによって表すものであり、これを使うとチェバの定理やメネラウス（Menelaus）の定理のような結果がほとんど自動的に得られる。線形代数の言葉でいえば、係数比較がうまくいくのは、**a** と **b** が一次独立（linearly independent）であり、したがって平面の基底（basis）をなすからである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、基底と座標が丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。