解答例

STEP I 2014、第 6 問

純粋数学 ・ ロジスティック写像の漸化式

> **STEP I 2014、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.7 節「**解けるカオス**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/solvable-chaos.html

鍵となる考え方

式 $4x(1-x)$ は一見扱いにくいが、$x = \sin^2\theta$ とおくと $1-x = \cos^2\theta$ となり、$4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2$ は姿を変えた 2 倍角の公式（double-angle formula）にほかならない。漸化式（recurrence）の各ステップは、単に角を 2 倍にするだけである。小問 (ii) では、係数に関するある 1 つの条件が成り立つかぎり、**どんな** 2 次の漸化式も 1 次の変数変換（linear change of variable）によってこの漸化式に帰着できることを見抜くことが要点となる。

解答

小問 (i)

$u_0 = \sin^2\theta$ とすると $1-u_0 = \cos^2\theta$ であるから、

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta.$$

これは u_0 の θ を 2θ に置き換えたものとまったく同じ形であるから、同じ計算により

$$u_2 = 4\sin^2 2\theta\,\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

各ステップで角が 2 倍になるので、次のように予想できる。

$$u_n = \sin^2(2^n\theta) \qquad (n \geq 0).$$

数学的帰納法（*induction*）による証明。 $n = 0$ のとき、これは $u_0 = \sin^2\theta$ となり、成り立つ。ある $k \geq 0$ に対して $u_k = \sin^2(2^k\theta)$ が成り立つと仮定する。このとき $1 - u_k = \cos^2(2^k\theta)$ であり、

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta) \\ &= \left(2\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)\right)^2 \\ &= \sin^2(2^{k+1}\theta), \end{aligned}$$

となる。ここで $A = 2^k\theta$ として $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ を用いた。よって k のときの結果から $k+1$ のときの結果が導かれ、数学的帰納法により、すべての $n \geq 0$ に対して $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ が成り立つ。

小問 (ii)

$\alpha \neq 0$ として $v_n = \alpha u_n + \beta$ とおく（v_n から u_n を復元できるように $\alpha \neq 0$ が必要である）。v_n の漸化式に代入すると

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r.$$

展開して α で割ると

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + (q-1)\beta + r}{\alpha}.$$

これが $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$ となってほしいので、係数を比較する（compare coefficients）。

- u_n^2：$p\alpha = 4$ より $\alpha = \dfrac{4}{p}$（$p \neq 0$ であるから問題なく、このとき $\alpha \neq 0$ でもある）。
- u_n：$q - 2p\beta = 4$ より $\beta = \dfrac{q-4}{2p}$。
- 定数項：$-p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0$。

はじめの 2 つで α と β が定まり、3 つ目は p、q、r に関する条件となる。$\beta = (q-4)/(2p)$ を代入し、両辺に $4p$ を掛けると

$$\begin{aligned} & 0 = -p \cdot \frac{(q-4)^2}{4p^2} + (q-1)\frac{q-4}{2p} + r \\ \iff \quad & 0 = -(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr \\ & \quad = (q-4)\big(-(q-4) + 2(q-1)\big) + 4pr \\ & \quad = (q-4)(q+2) + 4pr \\ & \quad = q^2 - 2q - 8 + 4pr. \end{aligned}$$

したがって $4pr = 8 + 2q - q^2$ ならば、$\alpha = 4/p$、$\beta = (q-4)/(2p)$ とすれば 3 つの係数がすべて一致し、数列（sequence）$u_n = (v_n - \beta)/\alpha$ は $(*)$ を満たす。これが示すべきことであった。

具体的な数列。ここでは $p = 1$、$q = 2$、$r = 2$ である。$4pr = 8$、$8 + 2q - q^2 = 8 + 4 - 4 = 8$ であるから条件は成り立つ。よって

$$\alpha = 4, \qquad \beta = \frac{2-4}{2} = -1, \qquad \text{したがって} \qquad v_n = 4u_n - 1.$$

考えてみよう 小問 (i) を使うには $u_0 = \sin^2\theta$ が必要である。ここで適切な θ は見つかるだろうか？

$v_0 = 1$ であるから $u_0 = (1+1)/4 = \frac{1}{2}$ が必要であり、$\frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$ である。よって $\theta = \pi/4$ とすればよく、小問 (i) より $u_n = \sin^2(2^n\pi/4) = \sin^2(2^{n-2}\pi)$ となる。したがって

$$v_n = 4\sin^2\left(2^{n-2}\pi\right) - 1 = 1 - 2\cos\left(2^{n-1}\pi\right),$$

ここで $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$ を用いた。値を求めると

- $n = 0$：$v_0 = 4\sin^2\frac{\pi}{4} - 1 = 1$；
- $n = 1$：$v_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1 = 3$；
- $n \geq 2$：2^{n-2} は整数であるから $\sin(2^{n-2}\pi) = 0$ となり、$v_n = -1$。

よって数列は

$$1,\ 3,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots$$

となる。すなわち $v_0 = 1$、$v_1 = 3$ であり、すべての $n \geq 2$ に対して $v_n = -1$ である。

検算

漸化式を直接くり返し適用してみる：$v_1 = -1 + 2 + 2 = 3$、$v_2 = -9 + 6 + 2 = -1$、$v_3 = -1 - 2 + 2 = -1$。-1 は自分自身に移るので、数列は -1 にとどまり、公式のとおりである。小問 (i) については $\theta = \pi/6$ を試す：$u_0 = \frac{1}{4}$、$u_1 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3}$、$u_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{2\pi}{3}$ となり、予想どおりである。公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ は、多数のランダムな角と最初のいくつかの項についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- $u_n = \sin^2(2n\theta)$ と書いてしまう。角は毎回 2 倍になるので、$2n$ ではなく 2^n のように増える。

- 初期値 $u_0 = (v_0 - \beta)/\alpha$ が $[0,1]$ に入っていること、すなわち本当に $\sin^2\theta$ の形に書けることの確認を忘れる。
- 定数項の方程式を、問題が導くよう求めている条件としてではなく、3 つ目の未知数を求める式として扱ってしまう。

STEP のその先へ

漸化式 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ は、パラメータが最も極端な値をとるときのロジスティック写像（logistic map）であり、カオス（chaos）の標準的な例である。$u_n = \sin^2(2^n\theta)$ であるから、θ/π を 2 進法で表すと、各ステップは 2 進数の桁を 1 つずらすだけであることがわかる。そのため、近い 2 つの初期値は指数関数的な速さで離れていく。小問 (ii) の置き換えは**共役**（conjugacy）であり、これは 2 つの力学系（dynamical system）が座標変換をすれば実は同じものである、という考え方である。ストロガッツ（Strogatz）の *Nonlinear Dynamics and Chaos*（『非線形ダイナミクスとカオス』）は、これらの考え方へのたいへん読みやすい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。