解答例

STEP I 2014、第 5 問

純粋数学 • 3 次不等式

> **STEP I 2014、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q5

鍵となる考え方

小問 (i) は 1 変数の 3 次関数（cubic）の問題であり、$x \geq 0$ における最小値はちょうどゼロになり、グラフは $x = a$ で軸に接する。この 1 つの不等式 $(x+2a)^3 \geq 27a^2x$ は、姿を変えた相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）である。左辺には和 $x+a+a$ が、右辺には積 $x \cdot a \cdot a$ が現れている。小問 (ii) と (iii) は、何を x と a とみなすかを選び、等号がどのような場合に成り立つかを正確に追跡する問題である。

解答

小問 (i)

微分すると

$$f'(x) = 3(x+2a)^2 - 27a^2 = 3((x+2a)^2 - 9a^2) = 3(x-a)(x+5a),$$

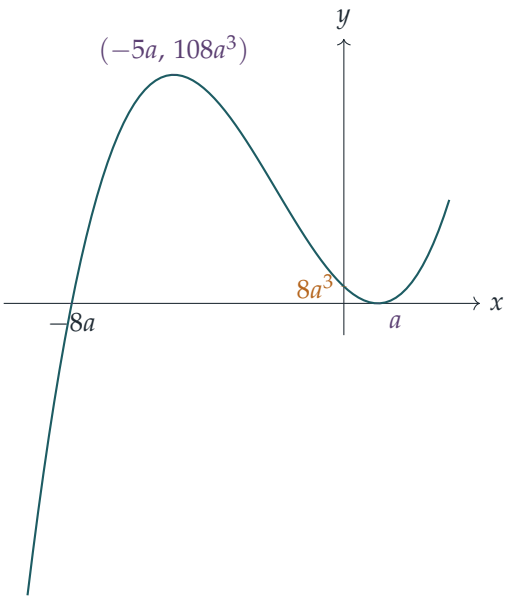
となるので、停留点（stationary point）は $x = a$ と $x = -5a$ である。そこでの値は

$$f(a) = (3a)^3 - 27a^3 = 0, \qquad f(-5a) = (-3a)^3 + 135a^3 = 108a^3,$$

であり、また $f(0) = 8a^3$ である。f は最高次の係数（leading coefficient）が正の 3 次関数であるから、$x = -5a$ は極大（local maximum）、$x = a$ は極小（local minimum）である。極小値が 0 であるから、グラフは x 軸と $x = a$ で接し、したがって $(x-a)^2$ は因数（factor）である。さらに定数項を比較すると

$$f(x) = (x-a)^2(x+8a),$$

を得る。これは両辺を展開してともに $x^3 + 6ax^2 - 15a^2x + 8a^3$ となることから確かめられる。



$x \geq 0$ では、グラフは高さ $8a^3 \geq 0$ から始まり、減少して 0 となるのは $x = a$ においてであり、その後は限りなく増加する。したがって f の、$x \geq 0$ における最小値は 0 であり、

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ただし} x \geq 0,$$

が成り立ち、等号は $x = a$ のときに限る。（因数分解した形からも直接同じことがわかる。$x \geq 0$ のとき $(x-a)^2 \geq 0$ であり、また $x + 8a > 0$ である（ただし $x = a = 0$ の場合を除く）。）$a = 0$ の場合は退化して $f(x) = x^3$ となるが、これも $x \geq 0$ で非負であり、等号は $x = 0 = a$ のときに限る。いずれの場合も

$$(x+2a)^3 \geq 27a^2x \quad (x, a \geq 0), \qquad \text{等号成立の必要十分条件は} x = a.$$

小問 (ii)

xy^2 を扱いたいので、小問 (i) で $a = y \geq 0$ とおく。$x \geq 0$、$y \geq 0$ のとき

$$27xy^2 \leq (x+2y)^3 \leq 3^3 = 27,$$

となる。2 つ目の不等号は、$0 \leq x + 2y \leq 3$ であり、3 乗が増加関数であることによる。よって領域全体で $xy^2 \leq 1$ である。

この評価は実際に達成される。等号成立（equality）には（小問 (i) より）$x = y$ かつ $x + 2y = 3$ が必要であり、これらから $x = y = 1$ を得る。実際 $1 \cdot 1^2 = 1$ である。したがって xy^2 の最大値（greatest value）は 1 であり、それをとるのは $x = 1$、$y = 1$ のときに限る。

小問 (iii)

考えてみよう 小問 (i) には x と a の 2 つの数しか登場しない。それがどうして 3 つの数について何かを語れるのだろうか？

q と r をひとまとめにする。すなわち $x=p$、$2a=q+r$ とおくと、$a=\frac{1}{2}(q+r)\geq 0$ である。小問 (i) より

$$(p+q+r)^3 \geq 27p\left(\frac{q+r}{2}\right)^2.$$

ここで $\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 - qr = \frac{(q-r)^2}{4} \geq 0$ であり、$p\geq 0$ であるから

$$(p+q+r)^3 \geq 27p\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 \geq 27pqr,$$

となり、これが示すべき不等式である。

等号成立。$(p+q+r)^3 = 27pqr$ ならば、この不等式の連鎖における 2 つの不等号はともに等号となる。

- 1 つ目が等号となるのは、ちょうど $x=a$、すなわち $p=\frac{1}{2}(q+r)$ のときである。
- 2 つ目が等号となるのは、ちょうど $\frac{27}{4}p(q-r)^2=0$、すなわち $p=0$ または $q=r$ のときである。

$p=0$ ならば、1 つ目の条件から $q+r=0$ となるので、$q=r=0$ でもある。$q=r$ ならば、1 つ目の条件から $p=q$ となる。いずれにしても $p=q=r$ である。逆に $p=q=r$ ならば、両辺はともに $27p^3$ に等しい。よって等号が成り立つのは次の場合であり、かつその場合に限る：

$$p=q=r.$$

検算

- $(x-a)^2(x+8a)$ を展開すると $(x+2a)^3-27a^2x$ に戻る。$a=1$ のとき $f(0)=8$、$f(1)=0$、$f(3)=4\cdot 11=44$ であり、いずれも非負である。
- 小問 (ii) で、直線 $x+2y=3$ 上のほかの点を試してみる。$(x,y)=(2,\frac{1}{2})$ では $\frac{1}{2}$、$(0.5,1.25)$ では約 0.78 となり、どちらも 1 より小さい。三角形を細かい格子で調べるコンピュータ探索でも、最大値は 1 であり、それは $(1,1)$ でとられる。
- 小問 (iii) で $p=1,q=2,r=3$ とすると $216\geq 162$ となる。小さな非負整数についてコンピュータで探索したところ、等号が成り立つのは $p=q=r$ のときだけであった。

よくある間違い

- $f(a) = 0$ を示しただけで、それが $x \geq 0$ における**最小**値である理由を説明しないこと。グラフの形（または因数分解）が必要であり、端点での値 $f(0) = 8a^3 \geq 0$ も含めて論じなければならない。
- 小問 (ii) で、上界（upper bound）1 が実際に達成されることの確認を忘れること。上界だけでは最大値にはならない。
- 小問 (iii) の等号成立の場合で、$q = r$ だけを結論し、もう一つの可能性 $p = 0$ を見落とすこと。これは排除する（あるいは $p = q = r = 0$ を導くことを示す）必要がある。

STEP のその先へ

小問 (iii) は 3 項の相加平均・相乗平均の不等式 $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$ である。ここで用いた方法、すなわち 2 つの変数をその平均でまとめ、2 変数の不等式を用いるという方法は、n 項の相加平均・相乗平均の不等式の古典的な証明の萌芽である。小問 (ii) は小規模な制約付き最適化（constrained optimisation）問題であり、大学の講義ではラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法（Lagrange multipliers）で扱う類のものであるが、相加平均・相乗平均の不等式のような不等式を使えば、はるかに簡潔に答えが得られることが多い。この精神に沿った内容をさらに学ぶには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。