解答例

STEP I 2014、第 4 問

純粋数学 • 関連する変化率

> **STEP I 2014、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q4

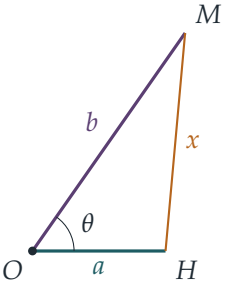
鍵となる考え方

2 本の針と、その先端どうしを結ぶ線分は三角形をなすので、余弦定理（cosine rule）により x を θ で表すことができる。時計は正確なので θ は一定の割合で増加し、したがって x の増加率はその定数と $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ の積になる。これを最大化するのは通常の 1 変数の微分の問題であり、停留点（stationary point）の方程式は $\cos\theta$ についての 2 次方程式となって、きれいに因数分解できる。

解答

x の増加率

O を針の軸、H を短針の先端、M を長針の先端とする。すると $OH = a$, $OM = b$, $\angle HOM = \theta$, $HM = x$ である。



余弦定理より

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

$x \geq b - a > 0$ であるから、x で自由に割ってよいことに注意する。時刻 t で微分すると

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ab\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

時計は正確なので、各針は一定の角速度（angular speed）で回転し、2 本の針のなす角は一定の割合 $\omega > 0$ で変化する（これは 2 つの角速度の差である。$0 \leq \theta < \pi$ の間は長針が先行していくので、θ は増加している）。したがって

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega ab\,\frac{\sin\theta}{x}.$$

よって、x が θ に依存し $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{ab\sin\theta}{x}$ を満たすことに注意しながら、$0 \leq \theta < \pi$ において $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{x}$ が最大となる点を求めればよい。

最大化

商の微分法（quotient rule）より

$$f'(\theta) = \frac{x\cos\theta - \sin\theta\cdot\dfrac{ab\sin\theta}{x}}{x^2} = \frac{x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta}{x^3}.$$

$c = \cos\theta$ とおく。$x^2 = a^2 + b^2 - 2abc$ と $\sin^2\theta = 1 - c^2$ を用いると、分子は

$$\begin{aligned} x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta &= (a^2+b^2)c - 2abc^2 - ab + abc^2 \\ &= -(abc^2 - (a^2+b^2)c + ab) \\ &= -(ac-b)(bc-a) \\ &= (b-ac)(bc-a). \end{aligned}$$

> **考えてみよう** この停留点が最大値を与え、しかも唯一の停留点であることは、どうすればわかるだろうか。

$c \leq 1 < b/a$ であるから $ac < b$ となり、因数 $b - ac$ は常に正である。また $x^3 > 0$ である。よって $f'(\theta)$ の符号は $bc - a$ の符号、すなわち $\cos\theta - \dfrac{a}{b}$ の符号と一致する。

- $\cos\theta > a/b$（θ が小さいとき）には $f'(\theta) > 0$ であり、f は増加する。
- $\cos\theta < a/b$（θ が大きいとき）には $f'(\theta) < 0$ であり、f は減少する。

$\cos\theta$ は $[0, \pi)$ で減少し、$0 < a/b < 1$ であるから、この範囲で $\cos\theta = a/b$ を満たす θ はちょうど 1 つ存在し、f はそこまで増加し、そのあと減少する。したがって、ここで x の増加率は大域的最大値（global maximum）をとる。このとき

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{a}{b} = b^2 - a^2,$$

であるから、x の増加率が最大となるのは $x = (b^2 - a^2)^{1/2}$ のときであり、題意が示された。

幾何学的には、$x^2 + a^2 = b^2$ は三角形が H で直角をもつことを意味する。すなわち、増加率が最大となるのは、先端どうしを結ぶ線分が短針と垂直になるときである。

$b = 2a$ の場合

このとき $\cos\theta = a/b = \frac{1}{2}$ であるから、増加率が最大となるのは $\theta = \pi/3$ のときである。

t を正午からの経過時間（分）とする。長針は 60 分で 2π だけ回転し、短針は 720 分で 2π だけ回転する。どちらも鉛直方向から時計回りに回る。よって 2 本の針のなす角は

$$\theta = 2\pi\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{720}\right)t = 2\pi \cdot \frac{11}{720}\,t = \frac{11\pi}{360}\,t,$$

であり、これはこの値が π 未満である間は成り立つ。正午に $\theta = 0$ から出発して、θ が初めて $\pi/3$ に達するのは

$$\frac{11\pi}{360}\,t = \frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{120}{11} = 10\tfrac{10}{11}\ \text{分}.$$

のときである。これは約 10.91 分（10 分約 55 秒）であり、題意のとおり 11 分よりわずかに短い。

検算

- $\theta = 0$ では増加率は 0 である（2 本の針は重なっており、$x = b - a$ は最小である）。また $\theta \to \pi$ のときも増加率は再び 0 に近づく（このとき $x \to a + b$ は最大である）。したがって、その間の点で最大となるのはまさに予想どおりである。
- $a = 1, b = 2$ として、針の先端の位置を 1 分ごとに追跡し、その距離の変化率を見積もると、最大の変化率は $t \approx 10.909$ 分に現れ、そこでは $x \approx 1.732 = \sqrt{3} = \sqrt{b^2 - a^2}$ となる。
- 答えが 11 よりわずかに小さいのは、もし短針が止まっていれば長針が 60° に達するのにちょうど 10 分かかるが、実際には短針が少しずつ進むため、わずかに余分な時間が必要になるからである。120/11 は、よく知られた「2 本の針が次に重なるのは 720/11 分後」と同じ種類の数である。

よくある間違い

- x そのものを最大化してしまう、あるいは商の微分法の段階で x も θ に依存することに気づかずに $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ を最大化してしまう。
- $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ として長針の速さ（毎分 $2\pi/60$）だけを用いてしまい、ちょうど 10 分という答えを得てしまう。2 本の針のなす角は、2 つの速さの**差**で増加する。
- 根 $\cos\theta = b/a$ を除外し忘れる。$b > a$ であるから、これはありえない。

STEP のその先へ

これは関連変化率（related rates）の問題である。ある量が既知の割合で変化するとき、それと幾何学的に結びついた量がどう応答するかを追跡するのである。時間とともに一様に変化する角度で位置を記述するという同じ考え方は、惑星の運動を扱う出発点でもある。円軌道上の 2 つの惑星の間の距離はここでの x とまったく同じように振る舞い、最も速く離れていく瞬間も同じ方法で求められる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この種の運動学をベクトルを用いて展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。