解答例

STEP I 2014、第 3 問

純粋数学 • 多項式の方程式と不等式

STEP I 2014、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s1-q3

鍵となる考え方

どちらの積分（integral）も初等的に計算できるので、条件は a と b についての単なる多項式（polynomial）の方程式になる。手間がかかるのは、共通因数（common factor）$b-a$ を見つけること（これは 0 でないので約分してよい）と、小問 (iii) において、残った式が十分に対称（symmetric）であり、和 $b+a$ と差 $b-a$ を用いてすっきり書けることに気づくことである。

解答

積分を計算すると、条件は

$$\frac{b^3-a^3}{3}=\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2(b+a)^2}{4}. \qquad (*)$$

となる。$b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$ であり、$b-a>0$ であるから、$(*)$ を $b-a$ で割って

$$4(b^2+ab+a^2)=3(b-a)(b+a)^2. \qquad (**)$$

を得る。

小問 (i)

$a=0$ のとき、$(**)$ は $4b^2=3b^3$ となる。$b>0$ であるから b^2 で割ることができ、

$$b=\tfrac{4}{3}.$$

を得る。

小問 (ii)

$a = 1$ のとき、$(**)$ は

$$4(b^2 + b + 1) = 3(b-1)(b+1)^2 = 3(b^3 + b^2 - b - 1),$$

となる。すなわち $3b^3 + 3b^2 - 3b - 3 - 4b^2 - 4b - 4 = 0$、つまり

$$3b^3 - b^2 - 7b - 7 = 0,$$

であり、これが示すべき式である。

次に $f(x) = 3x^3 - x^2 - 7x - 7$ とおくと、

$$f'(x) = 9x^2 - 2x - 7 = (9x + 7)(x - 1).$$

である。停留点（stationary point）は $x = -\frac{7}{9}$（最高次の係数（leading coefficient）が正の 3 次関数（cubic）なので極大（local maximum））と $x = 1$（極小（local minimum））であり、

$$f(1) = 3 - 1 - 7 - 7 = -12, \qquad f\left(-\tfrac{7}{9}\right) = \frac{-343 - 147 + 1323 - 1701}{243} = -\frac{868}{243}.$$

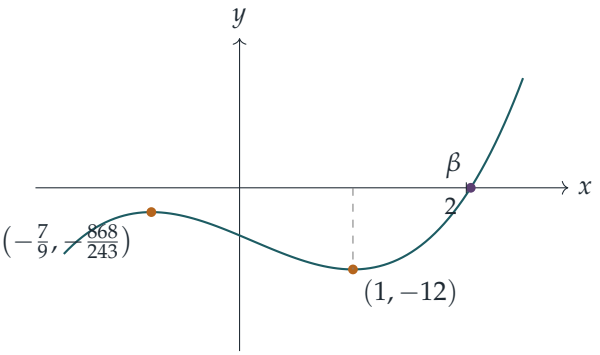
となる。

考えてみよう 極大値がわかると、なぜ解の個数がわかるのだろうか。

極大値は負である。$x \leq 1$ では、f は $x = -\frac{7}{9}$ まで増加し、その後減少するので、そこでは $f(x) \leq f(-\frac{7}{9}) < 0$ である。よって $x \leq 1$ の範囲に解はない。$x > 1$ では、f は狭義単調増加（strictly increasing）であり（f' の 2 つの因数はともに正である）、$f(x) \to \infty$ であるから、ちょうど 1 回だけ 0 をまたぐ。したがって実数解（real root）はちょうど 1 つであり、

$$f(2) = 24 - 4 - 14 - 7 = -1 < 0, \qquad f(3) = 81 - 9 - 21 - 7 = 44 > 0,$$

であるから、連続性（continuity）によりその解は 2 と 3 の間にある。



図は曲線 $y = 3x^3 - x^2 - 7x - 7$ の概形である。極値をとる 2 点（turning points）はどちらも x 軸より下にあるので、曲線は $\beta \approx 2.04$ でただ 1 回だけ x 軸と交わる。

小問 (iii)

$p = b + a$、$q = b - a$ とおくと、$p^2 = b^2 + 2ab + a^2$、$q^2 = b^2 - 2ab + a^2$ であるから、

$$3p^2 + q^2 = 4b^2 + 4ab + 4a^2 = 4(b^2 + ab + a^2).$$

となる。よって $(**)$ の左辺は $3p^2 + q^2$ であり、右辺は $3qp^2$ である。ゆえに

$$3p^2 + q^2 = 3p^2 q,$$

であり、これが示すべき式である。変形すると $q^2 = 3p^2(q-1)$ となる。$q > 0$ より左辺は正であるから、$q \neq 1$ であり、

$$p^2 = \frac{q^2}{3(q-1)}.$$

となる。

後半の結論を導く。

- **下界**（*lower bound*）。 $q^2 > 0$ かつ $p^2 > 0$（$p = b + a > 0$ だから）であるので、$3(q-1) = q^2/p^2 > 0$、すなわち $q > 1$ である。
- **上界**（*upper bound*）。$a \geq 0$ であるから $p = q + 2a \geq q > 0$ となり、$p^2 \geq q^2$ である。したがって
  $$\frac{q^2}{3(q-1)} \geq q^2 \iff 1 \geq 3(q-1) \iff q \leq \tfrac{4}{3},$$
  となる。ここで $q^2 > 0$ で割り、$3(q-1) > 0$ を掛けたが、どちらも不等号の向きを保つ。

したがって $1 < b - a \leq \frac{4}{3}$ であり、等号が成り立つのはちょうど $a = 0$ のとき、すなわち小問 (i) の場合である。

検算

- 小問 (i) は小問 (iii) と整合する。$a = 0$ のとき $q = b = \frac{4}{3}$ となり、範囲の上端である。
- 小問 (ii) も整合する。解は $b \approx 2.0390$ なので $q = b - 1 \approx 1.039$ であり、$(1, \frac{4}{3}]$ の中にある。$[1, 2.0390]$ 上で 2 つの積分を計算すると、小数点以下何桁にもわたって等しい値（約 2.4924）が得られる。

- 逆に、$(1, \frac{4}{3}]$ の任意の q に対して $p = q/\sqrt{3(q-1)} \geq q$ となり、したがって条件を満たす $a = \frac{1}{2}(p-q) \geq 0$ が得られる。よってこの評価は最良（sharp）である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $b-a$ を約分し忘れ、見かけの解（spurious root）$b=1$ をもつ 4 次式（quartic）が残ってしまう。
- $f(2) < 0 < f(3)$ だけを示すこと。これで $(2,3)$ に解が**ある**ことは示せるが、それが唯一の実数解であることは示せない。極値をとる点も調べる必要がある。
- 小問 (iii) で、$q-1>0$ を確かめる前に不等式を $q-1$ で割ってしまう。

STEP のその先へ

積分に関するコーシー＝シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）により $\left(\int_a^b x\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$ が成り立ち、等号は被積分関数（integrand）x が定数のときに限るが、そうではない。これを与えられた条件と組み合わせると $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x < (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$ となるので、$b-a>1$ である。こうして小問 (iii) の下界がたった 1 行で得られる。コーシー＝シュワルツの不等式は、さまざまな形で大学 1 年次の解析学（analysis）において最もよく使われる道具の一つである。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、リーマン積分（Riemann integral）とこのような不等式を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。