解答例

STEP I 2014、第 2 問

純粋数学 • 対数の積分

> **STEP I 2014、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q2

鍵となる考え方

すべては因数分解（factorisation）$x^2-4=(x-2)(x+2)$ にかかっている。これにより、2 次式の対数（logarithm）は $\ln(2-x)+\ln(2+x)$ に分かれ、この 2 つの部分は小問 (i)（およびその鏡像）によってすぐに積分できる。あとは絶対値（modulus）の記号のために、$\ln|x^2-4|$ がどこで正になりどこで負になるかを把握すればよく、(ii) の概形がまさにそれを示している。

解答

小問 (i)

$x<2$ のとき $2-x>0$ であるから、すべての式が定義される。右辺を微分する。$-(2-x)\ln(2-x)$ には積の微分法（product rule）を用いる。$-(2-x)$ の導関数は 1 であり、合成関数の微分法（chain rule）により $\ln(2-x)$ の導関数は $-\frac{1}{2-x}$ である。よって

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[-(2-x)\ln(2-x)+(2-x)\Big] &= 1\cdot\ln(2-x)-(2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2-x}\right)-1\\ &= \ln(2-x)+1-1=\ln(2-x),\end{aligned}$$

となり、与えられた原始関数（antiderivative）は正しい。

（別解として、$u=2-x$ と置換（substitution）し、$\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u-u$ を用いてもよい。）

同様にして、$x > -2$ のとき

$$\int \ln(2+x)\,\mathrm{d}x = (2+x)\ln(2+x) - (2+x) + c,$$

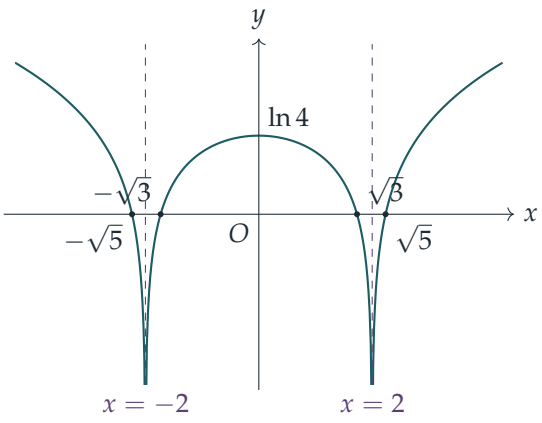
であり、これも後で必要になる。

小問 (ii)

$f(x) = \ln|x^2-4|$ とおく。これは $x \neq \pm 2$ で定義される。$f(-x) = f(x)$ であるから、曲線は y 軸に関して対称（symmetric）である。

- $|x| < 2$ のとき：$f(x) = \ln(4-x^2)$ であり、これは $x = 0$ で最大となり、そのとき $y = \ln 4$ である。$4 - x^2 = 1$、すなわち $x = \pm\sqrt{3}$ のとき 0 となり、$x \to \pm 2$ のとき $-\infty$ に発散する。
- $|x| > 2$ のとき：$f(x) = \ln(x^2-4)$ であり、これは $x = \pm 2$ の近くの $-\infty$ から増加し、$x^2 - 4 = 1$、すなわち $x = \pm\sqrt{5}$ で軸と交わり、その後は $2\ln|x|$ のようにゆっくりと増加する。

直線 $x = \pm 2$ は垂直な漸近線（asymptote）である。



小問 (iii)

x 軸の正の部分、y 軸および A で囲まれた有限の領域は、$x = 0$ から $x = \sqrt{3}$ までの山形の部分であり、そこでは $y = \ln(4-x^2) \geq 0$ である。その面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x,$$

である。ここで $\ln(4-x^2)=\ln(2-x)+\ln(2+x)$ を用いた。この範囲では両方の因数が正であるから、これは成り立つ。小問 (i) により

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-(2-x)\ln(2-x)+(2-x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+2\ln 2-2\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}+2\ln 2,\end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[(2+x)\ln(2+x)-(2+x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})-2\ln 2+2\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-2\ln 2.\end{aligned}$$

である。

? **考えてみよう** $\ln(2-\sqrt{3})$ と $\ln(2+\sqrt{3})$ はどのようにまとめればよいか。

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$ であるから、$\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$ である。2つの積分を足すと $\ln 2$ の項は打ち消し合い、

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x &= (2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}\\ &= 4\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3},\end{aligned}$$

となって、求める結果が得られる。

小問 (iv)

$|x|<2$ において、B は漸近線の間にある A の部分のうち、軸より下にある部分を上側に折り返したものである。概形より、$|x|\le\sqrt{3}$ では $\ln(4-x^2)\ge 0$、$\sqrt{3}<|x|<2$ では $\ln(4-x^2)<0$ である。対称性を用いると、求める面積は

$$2\left[\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x\right].$$

である。2つ目の積分は、被積分関数が $x=2$ で $-\infty$ に発散するので、広義積分である。$x=2-\varepsilon$ まで積分し、$\varepsilon\to 0^+$ とする。(i) で求めた $\ln(2-x)$ の原始関数に $x=2-\varepsilon$ を代入すると

$$-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\to 0,$$

となる。これは、$t \to 0$ のとき $t\ln t \to 0$ という与えられた事実による。よって上端からの寄与は 0 であり、

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x = 0 - \Big[-(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})\Big]$$
$$= -(2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - 2 + \sqrt{3},$$

となる。ここでも $\ln(2-\sqrt{3}) = -\ln(2+\sqrt{3})$ を用いた。もう一方は通常の積分である：

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x = (4\ln 4 - 4) - \Big[(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})\Big]$$
$$= 8\ln 2 - 2 + \sqrt{3} - (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}).$$

これらを足すと

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3}),$$

となり、その値はおよそ -0.259 である。予想どおり負になっている。したがって面積は

$$2\Big[\big(4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\big) - \big(8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3})\big)\Big]$$
$$= 16\ln(2+\sqrt{3}) - 16\ln 2 + 8 - 8\sqrt{3}$$
$$= 16\ln\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Big) + 8 - 8\sqrt{3} \approx 4.125.$$

である。

検算

- $[0,\sqrt{3}]$ と $[\sqrt{3},2]$ での 2 つの積分を足すと $\int_0^2 \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 \approx 1.545$ となる。これは (i) から 1 行で直接求めることもできる。$x=0$ において 2 つの原始関数の値は $-2\ln 2 + 2$ と $2\ln 2 - 2$ であり、打ち消し合うからである。
- (iii) の面積は $4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \approx 1.804$ である。これは山形の部分を囲む長方形の面積 $\sqrt{3}\times\ln 4 \approx 2.40$ より小さく、当然そうでなければならない。
- $\big|\ln|x^2-4|\big|$ を $(-2,2)$ で数値積分すると 4.1246 となり、$16\ln\big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\big) + 8 - 8\sqrt{3} = 4.12457\ldots$ と一致する。

よくある間違い

- $x=\sqrt{3}$ から $x=2$ までの曲線の部分が軸より下にあることを忘れ、符号付きの積分を引かずに足してしまう。

- $\ln(2-\sqrt{3})$ をまとめずに放置する。恒等式 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ こそが答えをすっきりさせる鍵である。
- 何の説明もなく $(2-x)\ln(2-x)$ に $x=2$ をそのまま代入する。この式はそこでは定義されておらず、値 0 を正当化するのは極限 $t\ln t\to 0$ である。

STEP のその先へ

(iv) の積分は**広義積分**（improper integral）である。被積分関数は有界ではないが、対数の発散が非常にゆるやかで $t\ln t\to 0$ となるため、面積は有限になる。大学ではこれを厳密に扱い、有界でない g に対して $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ がどのようなときに収束（converge）するかを正確に判定する（たとえば、$\int_0^1 t^{-p}\,\mathrm{d}t$ が収束するのはちょうど $p<1$ のときである）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、$t\ln t\to 0$ のような極限や積分の定義を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。