解答例

STEP I 2014、第 12 問

確率・統計 ・ 離散確率変数

> **STEP I 2014、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q12

鍵となる考え方

2 乗すれば絶対値記号（modulus signs）は消える。したがって $\mathrm{E}(X^2)$ を求めるには、サイコロの目 S についての $\mathrm{E}(S)$ と $\mathrm{E}(S^2)$ だけがあればよく、それを硬貨の 2 通りの結果について平均すればよい。すると、整数であるという条件は $(k-1)^2$ に関する整除性（divisibility）の問題に帰着し、1 桁の候補はごくわずかしか残らない。k が決まれば X のとる値は 5 つだけであり、2 回戦のゲームは組の短い列挙で処理できる。

解答

$\mathrm{E}(X^2)$ を求める

サイコロの出た目を S とする。このとき

$$\mathrm{P}(S=1)=\tfrac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(S=2)=\tfrac{1}{3},\qquad \mathrm{P}(S=3)=\tfrac{1}{6}.$$

である。よって

$$\mathrm{E}(S)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{6}=\tfrac{5}{3},\qquad \mathrm{E}(S^2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{9}{6}=\tfrac{10}{3}.$$

硬貨は公平で、サイコロとは独立（independent）である。$|a|^2 = a^2$ であるから、表が出たとき $X^2 = (kS-1)^2$、裏が出たとき $X^2 = (k-S)^2$ となる。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[(kS-1)^2] + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[(k-S)^2] \\ &= \tfrac{1}{2}[k^2\mathrm{E}(S^2) - 2k\mathrm{E}(S) + 1] + \tfrac{1}{2}[k^2 - 2k\mathrm{E}(S) + \mathrm{E}(S^2)] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{10}{3}k^2 - \tfrac{10}{3}k + 1 + k^2 - \tfrac{10}{3}k + \tfrac{10}{3}\right] \\ &= \frac{13k^2 - 20k + 13}{6}.\end{aligned}$$

一方、

$$k + \frac{13(k-1)^2}{6} = \frac{6k + 13k^2 - 26k + 13}{6} = \frac{13k^2 - 20k + 13}{6},$$

であるから、求める通り $\mathrm{E}(X^2) = k + \frac{13}{6}(k-1)^2$ が成り立つ。

k を求める

k は整数であるから、$\mathrm{E}(X^2)$ が整数となるのは、6 が $13(k-1)^2$ を割り切るときであり、かつそのときに限る。13 と 6 は互いに素（coprime）であるから、これは $6 \mid (k-1)^2$、すなわち 2 と 3 がともに $(k-1)^2$ を割り切ることを意味する。2 と 3 は素数（prime）であるから、それぞれが $k-1$ 自身を割り切らなければならず、したがって $6 \mid k-1$ である。$1 \le k \le 9$ より、$k = 1$ または $k = 7$ が残る。

> **考えてみよう** どちらの候補でも $\mathrm{E}(X^2)$ は整数になる。一方を除外するのはどの条件か。

$\mathrm{E}(X)$ に関する条件である。$k = 1$ のとき、どちらの規則でも $X = |S-1| = S-1$ となるので、$\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ であり、これは整数ではない。

$k = 7$ のとき、どの目についても $7S - 1 > 0$ かつ $7 - S > 0$ であるから、絶対値記号を外すことができて

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{2}(7 \cdot \tfrac{5}{3} - 1) + \tfrac{1}{2}(7 - \tfrac{5}{3}) = \tfrac{16}{3} + \tfrac{8}{3} = 8,$$

となり、また $\mathrm{E}(X^2) = 7 + \frac{13}{6} \cdot 36 = 85$ である。どちらも正の整数であるから、$k = 7$ である。

X の分布

$k = 7$ のとき、表が出れば $X = 7S - 1 \in \{6, 13, 20\}$、裏が出れば $X = 7 - S \in \{6, 5, 4\}$ である。（硬貨、サイコロ）の各組合せの確率は $\frac{1}{2}\mathrm{P}(S = s)$ であり、値 6 は表かつ $S = 1$ の場合と、裏かつ $S = 1$ の場合の両方から生じる。よって分布（distribution）は次の

ようになる。

x	4	5	6	13	20
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

確率の和は 1 になる。

2 回戦のゲーム

2 回の結果を X_1, X_2 とする。各回で新たにサイコロを振り硬貨を投げるので、これらは独立であり、それぞれ上の分布に従う。和が 25 を超える組と、和がちょうど 25 になる組を求めればよい。

> **考えてみよう** 合計が 25 を超える組を、漏れなく書き出すにはどうすればよいか。

大きい方の値で分類すればよい。どちらの結果も 20 でないとき、合計の最大値は $13+13=26$ であり、$13+6=19$ ではすでに小さすぎるので、該当する組は $(13,13)$ だけである。一方の結果が 20 のとき、他方は 5 より大きくなければならないので、6, 13, 20 のいずれかである。他方が 5 のときは合計がちょうど 25 になる。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2>25) &= \mathrm{P}(13,13)+2\,\mathrm{P}(20,6)+2\,\mathrm{P}(20,13)+\mathrm{P}(20,20)\\ &= \tfrac{1}{36}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{144}\\ &= \frac{4+12+4+1}{144}=\frac{7}{48},\end{aligned}$$

である。ここで係数 2 は 2 通りの順序を数えたものである。同様に

$$\mathrm{P}(X_1+X_2=25)=2\,\mathrm{P}(20,5)=2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}.$$

したがって、賭け手が受け取ると期待される金額（ポンド単位）は

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}.$$

である。

これが賭け金（stake）£1 より小さいとき、ゲームはカジノに有利である。

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}<1 \iff \frac{7w}{48}<\frac{35}{36} \iff w<\frac{35\cdot 48}{36\cdot 7}=\frac{20}{3}.$$

w は整数であるから、とりうる最大の値は $w=6$ である。$\frac{20}{3}$ は整数ではないので、公平なゲーム（fair game、受け取る金額の期待値がちょうど £1）を認めるかどうかにかかわらず、答えは変わらない。

検算

- 表から $\mathrm{E}(X) = \frac{4+10+36+26+20}{12} = 8$、$\mathrm{E}(X^2) = \frac{16+50+216+338+400}{12} = 85$ となり、公式と一致する。
- $w = 6$ のとき、受け取る金額の期待値は $\frac{7}{8} + \frac{1}{36} = \frac{65}{72} \approx £0.90$ で賭け金を下回る。$w = 7$ のときは $\frac{151}{144} \approx £1.05$ で賭け金を上回る。
- 2 回戦のゲーム 2×10^5 回をコンピュータでシミュレーションしたところ、合計が 25 を超えたのは約 14.5%（$\frac{7}{48} \approx 14.6\%$）、ちょうど 25 になったのは約 2.8%（$\frac{1}{36} \approx 2.8\%$）であった。

よくある間違い

- 分布の中で $X = 6$ を表の場合と裏の場合で 2 回書き出してしまい、まとめて $\mathrm{P}(X = 6) = \frac{1}{2}$ としない。
- $(20, 6)$ のような異なる値の組について、2 通りの順序を表す係数 2 を忘れる。
- 「和が 25 に等しい」場合を $£w$ の勝ちや負けとして扱ってしまう。この場合、賭け手は賭け金が戻ってくるだけである。

STEP のその先へ

$\mathrm{E}(X^2)$ の計算は、全期待値の法則（law of total expectation）$\mathrm{E}(Y) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{E}(Y \mid A_i)$ の一例であり、大学 1 年の確率論の講義では絶えず用いられる。2 回戦のゲームは独立な確率変数（random variable）の和の分布、すなわち畳み込み（convolution）に関するものであり、これは母関数（generating function）を使うと見通しよく扱える。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。