解答例

STEP I 2014、第 11 問

力学 ・ 連結した滑車系

STEP I 2014、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s1-q11

鍵となる考え方

各質点についてニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を立てる。張力（tension）は糸 1 本につき 1 つずつ置き、すべての質点の加速度を糸による拘束条件（constraint）から求める。システム II で重要なのは、滑車（pulley）P_1 が**軽い**という事実である。P_1 にはたらく力の合力は 0 でなければならない（さもなければ加速度が無限大になってしまう）。したがって、上の糸の張力はちょうど下の糸の張力の 2 倍となる。このことを押さえれば、P_1 とそれにつながる 2 つの質点は、M に対してちょうど質量 4μ の 1 つの質点と同じようにはたらく。

解答

以下を通して、質点は大きさのない点質量（point mass）、糸は軽くて伸びない（inextensible）もの、滑車はなめらかで軽いものとしてモデル化する。したがって、各糸の張力は糸のどこでも等しい。

小問 (i)

糸の張力を T とする。糸は伸びないので、M が下向きに加速度 a_1 で運動するとき、m は上向きに加速度 a_1 で運動する。運動の向きを正として各質点にニュートンの第 2 法則を適用すると、

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - T = Ma_1, \\ m: &\quad T - mg = ma_1. \end{aligned}$$

辺々を加えると $(M-m)g=(M+m)a_1$ となるので、

$$a_1=\frac{M-m}{M+m}\,g,$$

となり、題意が示された。これを m の式に代入すると、

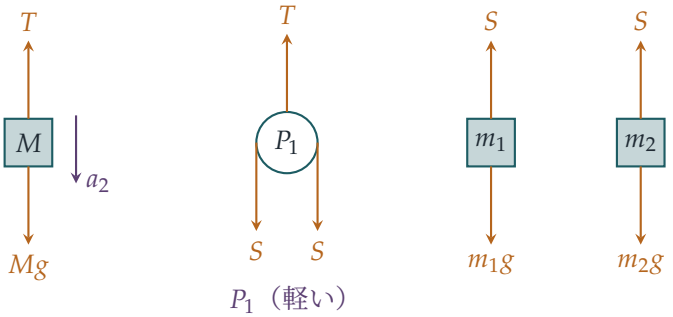
$$T=m(g+a_1)=m\cdot\frac{2M}{M+m}\,g=\frac{2Mmg}{M+m}.$$

糸のまっすぐな 2 つの部分はどちらも滑車から鉛直下向きに出ており、それぞれ張力 T で引くので、張力によって滑車にはたらく力は

$$2T=\frac{4Mmg}{M+m}\quad\text{鉛直下向き。}$$

小問 (ii)

固定滑車 P にかかる糸の張力を T、P_1 にかかる糸の張力を S とする。



軽い滑車。 P_1 にはたらく力は、上向きの T と下向きの $2S$ である（自身の重さは 0）。質量が 0 なので $T-2S=0\cdot(\text{加速度})=0$ となり、

$$T=2S.$$

考えてみよう m_1 と m_2 の加速度は、M の加速度とどのような関係にあるか。

上の糸は伸びないので、M が下向きに加速度 a_2 で運動するとき、P_1 は**上向き**に加速度 a_2 で運動する。下の糸が定めるのは、m_1 と m_2 の**P_1 に対する相対的な**運動だけである。すなわち、m_1 が P_1 に対して下向きに加速度 b で運動するとき、m_2 は P_1 に対して上向きに加速度 b で運動する。これに P_1 の運動を加えると、実際の加速度は

$$m_1:\ b-a_2\ \text{下向き},\qquad m_2:\ b+a_2\ \text{上向き}.$$

ここで b は 2 つ目の未知数であり、後で消去する。

運動方程式（equations of motion）。

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - 2S = Ma_2, \\ m_1: &\quad m_1 g - S = m_1(b - a_2), \\ m_2: &\quad S - m_2 g = m_2(b + a_2). \end{aligned}$$

m_1 の式を m_1 で、m_2 の式を m_2 で割ると、

$$g - \frac{S}{m_1} + a_2 = b = \frac{S}{m_2} - g - a_2.$$

よって

$$2(g + a_2) = S\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = S\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{S}{\mu},$$

したがって $S = 2\mu(g + a_2)$、$T = 2S = 4\mu(g + a_2)$ である。これを M の式に代入すると、

$$Mg - 4\mu g - 4\mu a_2 = Ma_2 \quad \Longrightarrow \quad (M + 4\mu)a_2 = (M - 4\mu)g,$$

ゆえに

$$a_2 = \frac{M - 4\mu}{M + 4\mu}\,g,$$

となり、題意が示された。これを小問 (i) と比べてみよ。M は、ちょうど質量 4μ の 1 つの質点とつり合わされてぶら下がっているかのようにふるまう。

a_1 と a_2 が等しくなるのはいつか。 $x > 0$ に対して $f(x) = \dfrac{M - x}{M + x}$ とおくと、$a_1 = f(m)\,g$、$a_2 = f(4\mu)\,g$ である。

$$f(x) = \frac{2M}{M + x} - 1$$

であり $M > 0$ なので、f は $x > 0$ で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、したがって単射（one-to-one）である。よって $a_1 = a_2$ となるのは $m = 4\mu$ のとき、かつそのときに限る。$m = m_1 + m_2$ とすると、これは

$$m_1 + m_2 = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \iff (m_1 + m_2)^2 = 4m_1 m_2 \iff (m_1 - m_2)^2 = 0 \iff m_1 = m_2,$$

となる。ここで最初の変形は $m_1 + m_2 > 0$ を掛けるもので、逆にたどることができる。以上で両方向の証明が完了する。

検算

- $m_1 = m_2$ ならば、システム II の下の部分はつり合うので $b = 0$ である。このとき P_1 とその質点は質量 $m_1 + m_2$ の 1 つの物体として動き、システム II はシステム I に帰着する。これはこの場合に $4\mu = m_1 + m_2$ となることと一致する。

- $m_2 \to 0$ ならば $\mu \to 0$ かつ $a_2 \to g$ となる。m_1 は単に落下するだけで張力を受けないので、M を引き止める重いものが何もない。妥当である。
- 小問 (ii) の張力 $T = 4\mu(g + a_2)$ は小問 (i) からも求められる。P_1 が固定されていれば、それにはたらく力は $4m_1m_2g/(m_1 + m_2) = 4\mu g$ となる。上向きに加速度 a_2 で運動することは、g を $g + a_2$ に置き換えることにほかならない。
- 数値で確かめると、$M = 3$、$m_1 = 1$、$m_2 = 2$ のとき $\mu = \frac{2}{3}$ であり、$a_2 = \frac{1}{17}g \approx 0.576\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ となる（$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とする）。4 つの方程式を直接解いても同じ値が得られる。

よくある間違い

- P_1 が動くことを忘れ、m_1 と m_2 の加速度を $b - a_2$ と $b + a_2$ ではなく $\pm b$ と書いてしまう。
- 軽い滑車の上下で $T = S$ としてしまう。P_1 の両側がそれぞれ S で下に引くので、その上の糸は $2S$ を担わなければならない。
- 理由を述べずに $a_1 = a_2 \Rightarrow m = 4\mu$ と結論してしまう。これには f が単射であることが必要である。

STEP のその先へ

この設定はアトウッドの器械（Atwood machine）の中にアトウッドの器械を組み込んだものであり、$\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ は**換算質量**（reduced mass）である。これは、惑星とその恒星のような二体問題（two-body problem）を 1 つの物体の問題に帰着させるときに現れるのと同じ量である。このような拘束のある系は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を用いると最もすっきりと扱える。ラグランジュ力学では独立な座標（ここでは P_1 の高さと、それに対する m_1 の位置）を直接用い、張力をまったく必要としない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は滑車の系を丁寧に扱い、さらに二体問題における換算質量へと進んでいる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。