解答例

STEP I 2014、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP I 2014、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q10

鍵となる考え方

どちらの小問も、自由飛行の部分はエネルギーで、各衝突はニュートン（Newton）の実験法則（Newton's experimental law）で扱う。小問 (ii) の要点は、ボール同士が衝突する瞬間、大きいボールはちょうど向きを反転したところであるのに対し、小さいボールはまだ全速力で落下しているという点に気づくことである。すなわち、両者は大きな接近速度で出会い、重い下のボールは軽いボールを出発点よりはるかに高く打ち上げることができる。そこから先は二つの方程式による衝突の問題であり、与えられた数値によって速さの比がきれいに求まる。

解答

両方のボールを鉛直方向に運動する一様な剛体球とみなし、空気抵抗はないものとし、g を重力加速度とする。各衝突は瞬間的であるから、衝突の間に重力が運動量を変化させることはない。

小問 (i)

ボールが地面に触れるのは中心の高さが R になったときであるから、ボールは距離 H だけ落下している。エネルギー保存則（conservation of energy）により、衝突直前の速さは

$$u = \sqrt{2gH}.$$

である。地面は固定されているので、ニュートンの実験法則により跳ね返りの速さは上向きに eu となる。ボールはその後、速さがゼロになるまで上昇する。再びエネルギ

ーにより、さらに

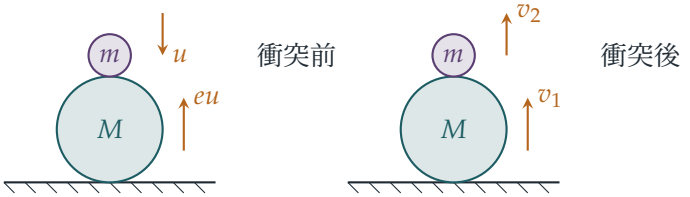
$$\frac{(eu)^2}{2g} = \frac{e^2 \cdot 2gH}{2g} = e^2 H.$$

だけ上昇する。この上昇の始まりでの中心の高さは R であるから、ボールは地面から高さ $R + He^2$ に達する。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

二つのボールは一緒に静止状態から自由落下するので、各瞬間において同じ速さをもつ。下のボールは中心が H だけ落下したときに地面に達するので、その瞬間、両方のボールは下向きに $u = \sqrt{2gH}$ で運動している。下のボールは跳ね返り、小問 (i) と同様に上向きの速さ eu で地面を離れる。その直後、まだ u で下向きに運動している上のボールと衝突する。

上向きを正とし、ボール同士の衝突直後の速度を v_1（質量 M のボール）、v_2（質量 m のボール）とする。



運動量保存則（conservation of momentum）により

$$Meu - mu = Mv_1 + mv_2,$$

が成り立ち、ニュートンの実験法則（遠ざかる速さは近づく速さの e 倍であり、近づく速さは $eu + u$ である）により

$$v_2 - v_1 = e(1+e)u.$$

が成り立つ。$v_1 = v_2 - e(1+e)u$ を運動量の式に代入すると、

$$\begin{aligned}(M+m)v_2 &= Meu - mu + Me(1+e)u \\ &= (Me(2+e) - m)u,\end{aligned}$$

となるので、

$$v_2 = \frac{Me(2+e) - m}{M+m}\, u.$$

である。

考えてみよう 衝突が起こるとき、小さいボールの中心はどこにあるか？

衝突は跳ね返りの直後に起こるので、大きいボールはまだ地面に接している。その中心の高さは R、上端の高さは $2R$ であり、小さいボールの中心の高さは $2R+r$ である。そこから小さいボールはさらに $v_2^2/(2g)$ だけ上昇するので、

$$h = 2R + r + \frac{v_2^2}{2g}.$$

である。与えられた値では $2R+r = 0.45$ であるから $v_2^2/(2g) = 4.05$ であり、また $u^2/(2g) = H = 1.8$ である。割り算をすると

$$\frac{v_2^2}{u^2} = \frac{4.05}{1.8} = \frac{9}{4}, \qquad \text{よって} \qquad v_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

となる。ここで、衝突後に小さいボールは上向きに運動するので正の平方根をとった。

$e = \frac{2}{3}$ のとき $e(2+e) = \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{9}$ である。$k = M/m$ とおき、分子と分母を m で割ると、

$$\frac{\frac{16}{9}k - 1}{k+1} = \frac{3}{2} \implies \tfrac{32}{9}k - 2 = 3k + 3 \implies \tfrac{5}{9}k = 5,$$

したがって

$$\frac{M}{m} = 9.$$

である。

検算

- $M/m = 9$ のとき $v_2 = \frac{3}{2}u$、$v_1 = v_2 - \frac{10}{9}u = \frac{7}{18}u$ となる。衝突前の運動量は $9m\cdot\frac{2}{3}u - mu = 5mu$、衝突後は $9m\cdot\frac{7}{18}u + m\cdot\frac{3}{2}u = 5mu$ である。両者は一致する。
- $v_1 < v_2$ であるから、衝突後に二つのボールは離れていく。当然そうでなければならない。
- 数値的には $u = \sqrt{2\times 9.8\times 1.8} \approx 5.94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$v_2 \approx 8.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ であり、この速さで $4.05\,\mathrm{m}$ 上昇するので $h = 4.5$ となる。
- $M \gg m$ のとき $v_2 \to e(2+e)u$ である。$e = 1$ ならばこれは $3u$ となり、完全弾性の「積み重ねたボール」の落下で高さが 9 倍になるというよく知られた結果である。

よくある間違い

- 地面からの最終的な高さを $v_2^2/(2g)$ だけで測ってしまい、衝突が小さいボールの中心の高さ $2R+r$ で起こることを忘れる。

- 遠ざかる速さとして $e \cdot 2u$ や eu を使ってしまう。ボールは互いに向かって運動しているので、近づく速さは $eu + u$ である。
- 符号の誤り。上向きを正と定め、衝突前の上のボールの速度を $-u$ とすること。

STEP のその先へ

積み重ねたボールの落下は、運動量を軽い物体へと集中させる仕組みを示す見事な実演である。いくつものボールを、それぞれが下のボールより軽くなるように積み上げた塔では、一番上のボールを放した高さの何倍もの高さまで打ち上げることができる。このような衝突を解析する最もすっきりした方法は、運動量ゼロの座標系（重心系、zero-momentum (centre-of-mass) frame）で考えることである。そこでは各ボールの速度は単に向きが反転し、e 倍されるだけである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と重心系を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。