解答例

STEP III 2013、第 9 問

力学 ・ 浮力と単振動

> **STEP III 2013、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q9

鍵となる考え方

球の沈んでいる部分は球冠（spherical cap）であり、その体積は円板に切り分けて求められる。これは回転体の体積（volume of revolution）の計算である。あとは、重力以外に働く力が浮力（buoyancy）だけである場合のニュートン（Newton）の運動の第二法則（Newton's second law）の問題となる。微小振動（small oscillations）については $x = x_0 + y$ とおき、右辺の 3 次式を平衡点（equilibrium）のまわりで線形化（linearise）し、$\ddot{y} = -\omega^2 y$ の形の方程式から ω^2 を読み取る。

解答

排除される体積

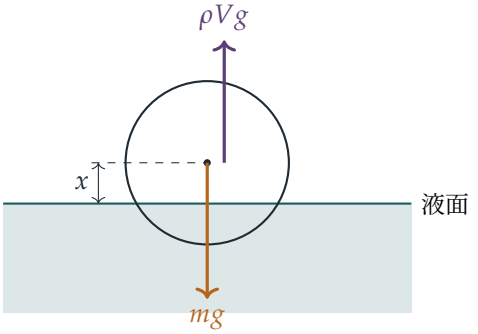
球の中心を原点とし、z を鉛直上向きにとる。このとき液面は平面 $z = -x$ であり、沈んでいる部分は球のうち $-R \le z \le -x$ を満たす部分である。これは $-R < x < R$ で意味をもつので、問題の場合を含んでいる。高さ z における断面は半径 $\sqrt{R^2 - z^2}$ の円板であるから、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{-x} \pi \left(R^2 - z^2\right) \mathrm{d}z = \pi \left[R^2 z - \tfrac{1}{3} z^3\right]_{-R}^{-x} \\ &= \pi \left(-R^2 x + \tfrac{1}{3} x^3 + R^3 - \tfrac{1}{3} R^3\right) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right), \end{aligned}$$

となり、これが求める体積である。

運動方程式

球を鉛直方向に運動する剛体（rigid body）としてモデル化する。タンクは大きいので、球が上下に揺れても液面の高さは変わらず、$\ddot{x}$ は球の上向きの加速度である。球の質量は $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s$ である。球に働く力は二つ、下向きの重力 mg と上向きの浮力 $\rho V g$ である。



上向きを正として鉛直方向の力のつり合いを考えると、

$$m\ddot{x} = \rho V g - mg \quad \Longrightarrow \quad m\left(g + \ddot{x}\right) = \rho g V.$$

m と V を代入すると

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_s \left(g + \ddot{x}\right) = \tfrac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

となり、両辺に $3/\pi$ を掛けると

$$4R^3 \rho_s \left(g + \ddot{x}\right) = \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

が得られ、題意が示された。

平衡状態での密度

平衡状態では $\ddot{x} = 0$ である。$x = \frac{1}{2}R$ を代入すると

$$4R^3 \rho_s g = \left(2R^3 - \tfrac{3}{2}R^3 + \tfrac{1}{8}R^3\right)\rho g = \tfrac{5}{8}R^3 \rho g,$$

したがって

$$\rho_s = \frac{5}{32}\rho.$$

これは $\frac{1}{2}\rho$ より小さく、当然そうあるべきである。中心が液面より上にあるので、液中にあるのは球の半分未満だからである。

微小振動

$f(x) = 2R^3 - 3R^2x + x^3$ とおき、y を微小量として $x = \frac{1}{2}R + y$ とおく。このとき $\ddot{x} = \ddot{y}$ である。

> **考えてみよう** 3 次式を y について線形なものに変えるにはどうすればよいか。

f を平衡点のまわりで展開し、1 次の項までだけを残す。すなわち $f(\frac{1}{2}R + y) = f(\frac{1}{2}R) + f'(\frac{1}{2}R)\,y + O(y^2)$ である。ここで

$$f'(x) = -3R^2 + 3x^2, \qquad f'(\tfrac{1}{2}R) = -3R^2 + \tfrac{3}{4}R^2 = -\tfrac{9}{4}R^2,$$

であり、先の計算から $f(\frac{1}{2}R) = \frac{5}{8}R^3$ である。$\rho_s = \frac{5}{32}\rho$ を用いると、運動方程式の左辺は $4R^3 \cdot \frac{5}{32}\rho\,(g + \ddot{y}) = \frac{5}{8}R^3\rho\,(g + \ddot{y})$ となる。よって 1 次の近似で

$$\tfrac{5}{8}R^3\rho\,(g + \ddot{y}) = \left(\tfrac{5}{8}R^3 - \tfrac{9}{4}R^2 y\right)\rho g.$$

$\frac{5}{8}R^3\rho g$ の項は打ち消し合い（これはまさに平衡条件である）、

$$\tfrac{5}{8}R^3\ddot{y} = -\tfrac{9}{4}R^2 g\,y \quad \Longrightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{18g}{5R}\,y.$$

が残る。これは $\omega^2 = \dfrac{18g}{5R}$ の単振動（simple harmonic motion）であるから、微小振動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{18g}}.$$

検算

- 体積：$x = R$ のとき公式は 0 を与え（液面にちょうど接している）、$x = 0$ のとき $\frac{2}{3}\pi R^3$（球の半分）、$x = -R$ のとき $\frac{4}{3}\pi R^3$（完全に沈んでいる）を与える。
- 次元：$\omega^2 = 18g/(5R)$ の単位は s^{-2} であり、当然そうあるべきである。
- 数値：$R = 1\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると、周期は約 $1.06\,\mathrm{s}$ である。微小な変位から出発して、非線形のままの方程式をコンピュータで数値的に追跡すると、10^4 分の 1 より良い精度で同じ周期が得られる。

よくある間違い

- 沈んでいる球冠の高さを $R - x$ ではなく x としてしまう。x は液面から上の中心の高さである。

- 復元力が $f'(\frac{1}{2}R)$ から生じ、それが負であることを忘れる。ここで符号を誤ると $\ddot{y} = +\omega^2 y$ となり、これはまったく振動ではない。
- 左辺の球自身の質量を落としてしまう。$\ddot{x}$ に掛かるのは ρ_s であって ρ ではない。（実際の浮体は周囲の液体の一部も引きずって動き、これを「付加質量」（added mass）というが、問題文ではこれを無視するよう指示されている。）

STEP のその先へ

ここで用いた方法、すなわち力を平衡点のまわりで展開して線形の項を残す方法は、あらゆる系の微小振動を求める標準的な方法である。その項の符号から安定性がわかり、その大きさから振動数がわかる。大学 1 年の講義では、これは $\ddot{x} = F(x)$ の線形化となり、さらに自由度（degrees of freedom）が複数ある場合の基準振動（normal modes）の研究へとつながる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、平衡点まわりの微小振動と流体の浮力をこのレベルで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。