解答例

STEP III 2013、第 8 問

純粋数学 • 2 次曲線の極方程式

> **STEP III 2013、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q8

鍵となる考え方

関係式 $r = ks$（ただし $k < 1$）は、E が焦点（focus）O、準線（directrix）D をもつ楕円（ellipse）であることを表しており、O を中心とする極座標（polar coordinates）では、r を θ で表すきわめて簡単な方程式になる。O を通る弦（chord）は互いに逆向きの 2 本の動径にすぎないので、$1/l$ は $\cos^2\theta$ の簡単な式として得られる。さらに、等間隔に並んだ n 本の直線によって、この和は $\cos 2\theta$ の項の和に変わる。これはまさに冒頭の和で片がつくものである。

解答

冒頭の和

各項は初項 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$、公比 $w = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$ の等比数列（geometric progression）をなす。$n \geq 2$ より角 $2\pi/n$ は $(0, \pi]$ に属するので $w \neq 1$ であり、通常の公式が使える：

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha + r\pi/n)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-w^n}{1-w} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}{1-w} = 0.$$

実部をとると $\sum_{r=0}^{n-1} \cos(2\alpha + 2r\pi/n) = 0$ である。以後はこの形を用いる。

距離 s

図のように、θ は O から D に下ろした垂線から測る。その垂線の足は O から距離 d の位置にあり、P は同じ向きに O から距離 $r\cos\theta$ の位置にあるので、P が D に関して O

と同じ側にあるとき

$$s = d - r\cos\theta.$$

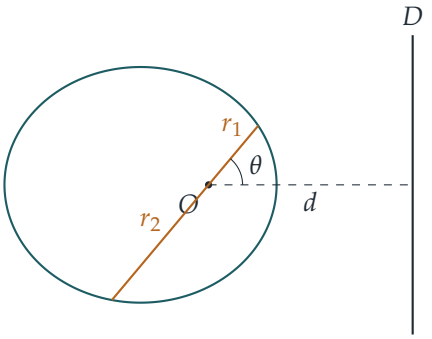
となる。（これはすべての θ で成り立つ。$\cos\theta < 0$ のとき P は O よりも D から遠く、この式は正しく $s > d$ を与える。）

E の極方程式

E のすべての点は D に関して O と同じ側にある。実際、P が反対側にあるとすると $s = r\cos\theta - d$ となり、$r = ks$ から $r(1 - k\cos\theta) = -kd < 0$ が得られるが、$0 < k < 1$ のとき $1 - k\cos\theta > 0$ であるから、これは不可能である。よって $s = d - r\cos\theta$ を使うことができ、$r = ks$ は

$$r = k(d - r\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{kd}{1 + k\cos\theta}.$$

となる。$k < 1$ より分母はすべての θ に対して正であるから、O から出る各半直線は E とちょうど 1 回交わる。



O を通る弦の長さ

O を通り垂線と角 θ をなす直線は、E と方向 θ および $\theta + \pi$ にある点で交わり、これらは O に関して互いに反対側にある。$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ であるから、弦の長さは

$$l = \frac{kd}{1 + k\cos\theta} + \frac{kd}{1 - k\cos\theta} = \frac{2kd}{1 - k^2\cos^2\theta}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{1}{l} = \frac{1 - k^2\cos^2\theta}{2kd}.$$

これは直線だけで決まり、その 2 つの向きのどちらを θ とよぶかにはよらないことに注意する。

考えてみよう n 本の直線について $\cos^2\theta$ の和をどのように求めればよいか？

2 倍角の公式 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ を使う。$\cos 2\theta$ の項はまさに冒頭の和の実部である。

n 本の直線にわたる和

隣り合う直線のなす角は π/n であるから、n 本の直線の角は、ある定数 α を用いて $\theta_j = \alpha + j\pi/n$（$j = 1, \ldots, n$）と表せる。これら n 個の $2\theta_j$ の値は $2\alpha + 2j\pi/n$ であり、$j = n$ を $j = 0$ に置き換えると（これは $2\theta_j$ を 2π だけ変える）、冒頭の和の角と一致する。したがって

$$\sum_{j=1}^{n} \cos^2\theta_j = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \cos 2\theta_j = \frac{n}{2} + 0 = \frac{n}{2},$$

であり、よって

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{l_j} = \frac{1}{2kd}\left(n - k^2 \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{(2-k^2)n}{4kd},$$

となる。これが求める結果である。条件 $n \geq 2$ は、冒頭の和で $w \neq 1$ を保証するためにただ一度だけ用いた。

検算

- $n = 2$、$k = \frac{1}{2}$、$d = 1$ とし、直線を OD に沿う方向とそれに垂直な方向にとる。OD に沿う弦は長軸（major axis）であり、その長さは $\frac{1/2}{3/2} + \frac{1/2}{1/2} = \frac{4}{3}$ である。それに垂直な弦（通径（latus rectum））の長さは $2kd = 1$ である。よって $\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ となり、公式は $\frac{(7/4)\cdot 2}{2} = \frac{7}{4}$ を与える。
- $n = 1$ のときは、当然ながら結果は成り立たない。1 本の直線の $1/l$ はその向きに依存するからである。$n = 1$ の場合はちょうど $w = 1$ となる場合である。
- 無作為に選んだ d、k、n、α に対して各弦を $r = ks$ から直接求めるコンピュータによる検証でも、公式と一致した。たとえば $d = 1$、$k = \frac{1}{2}$、$n = 3$ のとき、どの α に対しても $2.625 = \frac{21}{8}$ となる。

よくある間違い

- $s = d + r\cos\theta$ と書いてしまう。図では θ は D の方へ向かって測っているので、OP に沿って外へ進むと D に近づく。
- 弦の残り半分を再び $kd/(1 + k\cos\theta)$ としてしまう。反対向きの角が $\theta + \pi$ であることを忘れている。
- $2\theta_j$ ではなく角 $\alpha + j\pi/n$ そのものを足し合わせてしまう。円をちょうど一周、等間隔に回るのは 2 倍した角のほうであり、そのために冒頭の和には因子 2 がついている。

STEP のその先へ

焦点–準線による定義から、すべての円錐曲線（conic）は極方程式 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$ をもち、楕円、放物線、双曲線はそれぞれ $e < 1$、$e = 1$、$e > 1$ に対応する。これは、惑星の運動に関するニュートン（Newton）の方程式を解いたときにケプラー（Kepler）の軌道が現れる形である。直交する任意の 2 本の焦点弦（focal chord）について $1/l_1 + 1/l_2$ が一定であることは古典的な性質であり、本問の結果はそれを一般化している。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この方法で軌道の方程式を導いている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。