解答例

STEP III 2013、第 7 問

純粋数学 • 常微分方程式のエネルギー法

STEP III 2013、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.2 節「解かずに評価する」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/bounding-without-solving.html

鍵となる考え方

どの方程式も、ばねにつながれた粒子のように見える。未知関数だけに依存する「力」の項があり、さらに (ii) と (iii) では導関数に比例する摩擦の項が加わっている。方程式に導関数を掛けると、それはある「エネルギー」の導関数に変わる。摩擦がなければエネルギーは保存される。逆向きに押すことのない摩擦があれば、エネルギーは減少することしかできないので、初期値を超えることはない。小問 (iii) では、エネルギーを自分で構成し、摩擦係数が決して負にならないことを示すことが求められている。

解答

小問 (i)

$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ と書く。連鎖律（chain rule）により、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2y'y'' + 2y^3y' \\ &= 2y'\left(y'' + y^3\right) = 0,\end{aligned}$$

となる。ここで微分方程式（differential equation）を用いた。よって E は定数であり、その値は $\mathrm{E}(0) = 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^4 = \frac{1}{2}$ である。したがって、すべての x に対して

$$\tfrac{1}{2}y^4 = \tfrac{1}{2} - (y')^2 \le \tfrac{1}{2},$$

が成り立つ。$(y')^2 \geq 0$ だからである。よって $y^4 \leq 1$ であり、すべての x に対して $|y(x)| \leq 1$ が得られる。

小問 (ii)

同様に微分し、方程式を $v'' + \sinh v = -xv'$ の形で用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2v'v'' + 2\sinh v\, v' \\ &= 2v'\big(v'' + \sinh v\big) \\ &= -2x\,(v')^2.\end{aligned}$$

$x \geq 0$ のとき x も $(v')^2$ も非負であるから、求めるとおり $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} \leq 0$ である。

よって E は $x \geq 0$ で単調非増加（non-increasing）であり、そこで $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$ が成り立つ。$x = 0$ では $\cosh(\ln 3) = \frac{1}{2}\big(3 + \frac{1}{3}\big) = \frac{5}{3}$ であるから、$\mathrm{E}(0) = 0 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ となる。したがって、$x \geq 0$ に対して

$$2\cosh v(x) = \mathrm{E}(x) - (v')^2 \leq \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3},$$

であり、$\cosh v(x) \leq \frac{5}{3}$ が成り立つ。

小問 (iii)

(ii) と同様に、$\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ の形のエネルギーを探す。すると

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'w'' + F'(w)\,w' = w'\big(2w'' + F'(w)\big),$$

となり、方程式を用いて括弧内が w' の倍数になるようにしたい。そうなるのは $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$ のときである。

? **考えてみよう** 導関数が $w\cosh w + 2\sinh w$ となる w の関数は何か。

部分積分（integration by parts）により $\int w\cosh w\,\mathrm{d}w = w\sinh w - \cosh w$ であり、また $\int 2\sinh w\,\mathrm{d}w = 2\cosh w$ である。これらを足すと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\big(w\sinh w + \cosh w\big) = \sinh w + w\cosh w + \sinh w = w\cosh w + 2\sinh w.$$

そこで

$$\mathrm{E}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\big(w\sinh w + \cosh w\big).$$

とおく。$g(x) = 5\cosh x - 4\sinh x - 3$ と書くと、方程式は $w'' + (w\cosh w + 2\sinh w) = -g(x)\,w'$ を意味するので、

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'\big(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\big) = -2g(x)\,(w')^2.$$

考えてみよう $g(x)$ が負になることはあるか。

指数関数で表すと、

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{5}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)-3 \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-3+\tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-x} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{x}+9\right)=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}-3\right)^{2} \ \geq\ 0 \end{aligned}$$

がすべての x に対して成り立つ（0 になるのは $x=\ln 3$ のときだけである）。よって $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}\leq 0$ であり、$x\geq 0$ に対して $\mathrm{E}(x)\leq \mathrm{E}(0)$ である。$x=0$ では $w=0$、$w'=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、$\mathrm{E}(0)=\frac{1}{2}+2(0+1)=\frac{5}{2}$ となる。したがって、$x\geq 0$ に対して

$$2\left(w\sinh w+\cosh w\right)\leq \mathrm{E}(x)\leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{よって} \qquad w\sinh w+\cosh w\leq \tfrac{5}{4}.$$

最後に、すべての実数 w に対して $w\sinh w\geq 0$ である。w と $\sinh w$ は常に同符号だからである。この項を落とすと、求めるとおり $x\geq 0$ に対して $\cosh w(x)\leq \frac{5}{4}$ が得られる。

検算

- (ii) では、この評価は出発点で等号が成立する（sharp）。実際 $\cosh v(0)=\cosh(\ln 3)=\frac{5}{3}$ である。
- (iii) では $g(0)=5-0-3=2$ であり、因数分解した形から得られる $\frac{1}{2}(1-3)^2=2$ と一致する。
- 各方程式を数値的に解くと、この描像が確かめられる。(i) では E は 0.5 のままであり、(ii) では E は $\frac{10}{3}$ から減少し、(iii) では E は 2.5 から減少して、$\cosh w$ はおよそ 1.03 を超えることがなく、上界 1.25 を十分に下回っている。

よくある間違い

- $F(w)$ を x で微分するとき、連鎖律から出る因子 w' を忘れる。
- (iii) で、$w\sinh w\geq 0$ だからその項を落とせるという説明をせずに、$w\sinh w+\cosh w\leq\frac{5}{4}$ で止めてしまう。
- $g(x)>0$ と主張する。g は $x=\ln 3$ で 0 になるので、成り立つのは $\leq$ だけである（必要なのはそれで十分である）。

STEP のその先へ

これらのエネルギー関数は**リャプノフ関数**（Lyapunov function）と呼ばれる。解に沿って決して増加しない量であり、系を解かずに、それが有界にとどまること、あるいは落ち着くことを証明するために用いられる。エネルギー保存と減衰による散逸という同じ考え方が、非線形振動子の安定性理論の基礎となっている。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、非線形系と安定性の章でリャプノフ（Lyapunov）の方法を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。