解答例

STEP III 2013、第 6 問

純粋数学 • 複素数の絶対値に関する不等式

> **STEP III 2013、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.8 節「円板に隠れた距離」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/poincare-disc.html

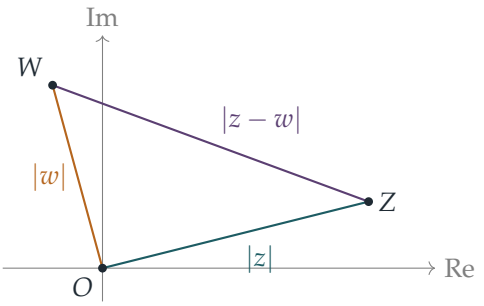
鍵となる考え方

すべての土台は、絶対値（modulus）の 2 乗をその数と複素共役（conjugate）の積として $|u|^2 = uu^*$ と書くことにある。この方法で $|z-w|^2$ と $|1-zw^*|^2$ を展開すると、どちらにも同じ交差項 $zw^* + z^*w$ が現れる。ただ一つの量 E が両方に登場するのは、まさにこのためである。両方の絶対値を「何かの 2 乗から E を引いたもの」の形に書いてしまえば、最後の不等式は $\frac{A-E}{B-E}$ と $\frac{A}{B}$ という形の二つの分数の比較となり、それは $B-A$ の符号に帰着する。

解答

三角不等式

アルガン図（Argand diagram、複素数平面）上に、原点 O と、z、w を表す点 Z、W をとる。距離 OZ と OW はそれぞれ $|z|$ と $|w|$ であり、距離 WZ は $|z-w|$ である。



線分 WZ は W から Z への最短経路であるから、経路 $W \to O \to Z$ より長くはない。すなわち

$$|z-w| = WZ \leq WO + OZ = |w| + |z|.$$

これが三角不等式（triangle inequality）である。等号が成り立つのは、O が線分 WZ 上にあるとき、すなわち z と w が互いに逆向きであるとき（またはどちらかが 0 のとき）に限る。O、Z、W が一直線上にあって O がその間にない場合、「三角形」はつぶれてしまうが、最短経路による議論はそのまま適用できる。

小問 (i)

$|u|^2 = uu^*$ と $(z-w)^* = z^* - w^*$ を用いると、

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(z^*-w^*) \\ &= zz^* + ww^* - zw^* - z^*w \\ &= |z|^2 + |w|^2 - (zw^* + z^*w). \end{aligned}$$

$|zw| = |z||w|$ であるから $(|z|+|w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw|$ となり、したがって

$$(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| - zw^* - z^*w - 2|zw| = |z-w|^2,$$

となって、示すべき式が得られる。これを変形すると

$$E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2.$$

右辺は実数の 2 乗の差であるから、E は実数である。三角不等式より $0 \leq |z-w| \leq |z|+|w|$ であり、非負の量を 2 乗しても不等号の向きは変わらないので、$E \geq 0$ である。

（直接示すこともできる。z^*w は zw^* の複素共役であるから $E = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw^*|$ であり、$\mathrm{Re}\,u \geq -|u|$ なので、これは実数で 0 以上である。）

小問 (ii)

同様に、$(zw^*)^* = z^*w$ を用いると、

$$\begin{aligned}|1 - zw^*|^2 &= (1 - zw^*)(1 - z^*w)\\ &= 1 - zw^* - z^*w + zz^*ww^*\\ &= 1 + |zw|^2 - (zw^* + z^*w)\\ &= \left(1 + 2|zw| + |zw|^2\right) - (zw^* + z^*w + 2|zw|)\\ &= (1 + |zw|)^2 - E,\end{aligned}$$

となって、示すべき式が得られる。

最後の不等式

$$A = (|z| + |w|)^2, \qquad B = (1 + |zw|)^2,$$

とおく。すると小問 (i)、(ii) の結果は $|z - w|^2 = A - E$ および $|1 - zw^*|^2 = B - E$ と書ける。

まず、左辺が意味をもつことを確かめる。$|z| > 1$ かつ $|w| > 1$ ならば $|zw^*| = |z||w| > 1$ であるから、$zw^* \neq 1$ であり、$B - E = |1 - zw^*|^2 > 0$ となる。また $B > 0$ である。

示すべき不等式の両辺はともに非負であるから、それは両辺の 2 乗の間の不等式

$$\frac{A - E}{B - E} \leq \frac{A}{B}.$$

と同値（equivalent）である。正の量 $B(B - E)$ を両辺に掛けると、これは

$$(A - E)B \leq A(B - E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B - A) \geq 0.$$

と同値である。

> **考えてみよう** $B - A$ の符号はどうなるか。また、$|z|$ と $|w|$ に関する条件はどこで効いてくるか。

$a = |z|$、$b = |w|$ とおくと、

$$B - A = (1 + ab)^2 - (a + b)^2 = 1 + a^2b^2 - a^2 - b^2 = (1 - a^2)(1 - b^2).$$

$a > 1$ かつ $b > 1$ ならば、二つの括弧はともに負であるから $B - A > 0$ である。小問 (i) より $E \geq 0$ なので、$E(B - A) \geq 0$ となる。上の各段階はすべて同値変形であったから、

$$\frac{|z - w|}{|1 - zw^*|} \leq \frac{|z| + |w|}{1 + |zw|}.$$

が成り立つ。等号が成り立つのは $E = 0$ のとき、すなわち z と w が互いに逆向きであるときに限る。

$|z| < 1$ かつ $|w| < 1$ の場合

答えは「はい」であり、この不等式はやはり成り立つ。このとき $|zw^*| = ab < 1$ であるから、やはり $zw^* \neq 1$ かつ $B - E > 0$ であり、同値変形の連鎖はそのまま通用する。今度は $(1-a^2)(1-b^2)$ の二つの括弧がともに正であるから、やはり $B - A > 0$ となり、$E(B-A) \geq 0$、したがって不等式が得られる。

重要なのは、$1-a^2$ と $1-b^2$ が同符号であることだけである。一方の絶対値が 1 より大きく、他方が 1 より小さい場合は $B - A < 0$ となり、不等式は成り立たないことがある。たとえば $z = 2$、$w = 0.4$ のとき、左辺は $1.6/0.2 = 8$ であるが、右辺は $2.4/1.8 = \frac{4}{3}$ である。

検算

- $z = 2$、$w = 2\mathrm{i}$ とする。このとき $|z-w| = 2\sqrt{2}$、$1 - zw^* = 1 - 2(-2\mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i}$ であるから、左辺は $2\sqrt{2}/\sqrt{17} \approx 0.686$、右辺は $4/5 = 0.8$ である。両方を $\frac{1}{4}$ 倍した場合（$z = \frac{1}{2}$、$w = \frac{1}{2}\mathrm{i}$）も同じ二つの数 $0.686 \leq 0.8$ が得られ、$|z|, |w| < 1$ の場合の例となっている。
- 等号の場合：$z = 2 + \mathrm{i}$、$w = -1.5z$ とすると $E = 0$ となり、両辺はともに小数第 4 位まで 0.6577 に等しい。
- 数十万組のランダムな組についてコンピュータで確認したところ、二つの恒等式、$E \geq 0$、および両方の場合の不等式が確かめられた。

よくある間違い

- $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2zw^*$ と書いてしまう。交差項は $zw^* + z^*w$ であり、これらは互いに複素共役であるが、一般には等しくない。
- $|1 - zw^*| \neq 0$ を確かめずに分母を払ってしまう。ここでは $|zw| \neq 1$ がそれを保証している。
- 導出で $|z|, |w| > 1$ を用いたからという理由で、最後の問いに「いいえ」と答えてしまう。因数分解 $(1-a^2)(1-b^2)$ を見れば、符号が一致することだけが重要だとわかる。

STEP のその先へ

$|1 - zw^*| = |1 - z^*w|$ であるから、左辺は $\dfrac{z - w}{1 - z^*w}$ の絶対値である。$|z| < 1$ を満たす z を固定すると、写像 $w \mapsto \dfrac{z - w}{1 - z^*w}$ は単位円板（unit disc）をそれ自身の上へ写すメビウス変換（Möbius transformation）であり、$\left|\frac{z-w}{1-z^*w}\right|$ は z と w の間の擬双曲距離（pseudo-hyperbolic distance）である。この問題の不等式は、この距離が、z から 0 までの距離と w から 0 までの距離の「双曲的な和」以下であることを述べている。これは三角不等式の強い形であり、双曲幾何（hyperbolic geometry）の基礎の一つである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、メビウス変換と双曲円板を美しい図とともに解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。