解答例

STEP III 2013、第 5 問

純粋数学 ・ 有理性と互いに素

> **STEP III 2013、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q5

鍵となる考え方

すべての段階は一つの道具で動いている。すなわち、ある数が積を割り切り、かつ一方の因数と互いに素（coprime）であれば、その数はもう一方の因数を割り切る、という事実である。有理数を既約分数で表し、分母を払い、各因数がどちら側に落ち着かざるを得ないかを見届けるのである。小問 (ii) では、この論法によって分母 b が二つの事実の間に挟み込まれ、b がごく小さくない限りそれらは両立しない。

次の小さな事実を繰り返し用いる。**p と q が互いに素ならば、任意の正の整数 s, t に対して p^s と q^t も互いに素である。**実際、p^s と q^t の両方を割り切る素数（prime）があれば、それは p と q の両方を割り切ることになり（素数が積を割り切るならば因数のいずれかを割り切る。これは与えられた結果で a を素数とした場合である）、互いに素であることに矛盾する。

解答

小問 (i)

$q^n N = p^n$ より、p^n は $q^n N$ を割り切る。p と q は互いに素であるから、p^n と q^n も互いに素であり、与えられた結果（$a = p^n, b = q^n, c = N$ とする）により p^n は N を割り切る。よって、ある正の整数 k を用いて $N = kp^n$ と書ける。これが示すべきことであった。

これを代入し直すと $q^n k p^n = p^n$ となるから、$q^n k = 1$ である。どちらも正の整数であるから $k = 1$ かつ $q^n = 1$ であり、

$$q = 1 \quad （および N = p^n）.$$

を得る。

次に、任意の正の整数 n と N をとり、$\sqrt[n]{N}$ が有理数であると仮定する。これは正であるから、p, q を正の整数として、既約分数（lowest terms）の形 $\sqrt[n]{N} = p/q$、すなわち p と q が互いに素であるように書ける。両辺を n 乗すると $q^n N = p^n$ となり、上の議論から $q = 1$ である。したがって $\sqrt[n]{N} = p$ は正の整数である。以上より、$\sqrt[n]{N}$ は正の整数であるか、無理数（irrational）であるかのいずれかである。

小問 (ii)

$\gcd(a,b) = \gcd(c,d) = 1$ のもとで $a^a d^b = b^a c^b$ が成り立っている。

$d^b = b^a$ を示す。右辺を見ると、b^a は $a^a d^b$ を割り切る。a と b は互いに素であるから b^a と a^a も互いに素であり、よって b^a は d^b を割り切る。同様に、d^b は $b^a c^b$ を割り切り、d^b は c^b と互いに素であるから、d^b は b^a を割り切る。互いに割り切り合う二つの正の整数は等しいから、

$$d^b = b^a,$$

であり、これをもとの等式で約すと $a^a = c^b$ も得られる。

p が d の素因数であるとすると、p は $d^b = b^a$ を割り切り、b の累乗を割り切る素数は b を割り切る。よって p は b の素因数である。

p の累乗。 d と b を割り切る p の最大の累乗をそれぞれ p^m, p^n とする。前段落より $m, n \geq 1$ である。素因数分解の一意性（unique factorisation）により、d^b を割り切る p の最大の累乗は p^{mb} であり、b^a を割り切る最大の累乗は p^{na} である。$d^b = b^a$ であるからこれらは等しく、$mb = na$ であり、

$$b = \frac{na}{m}.$$

考えてみよう $b = na/m$ から、p^n に対するどのような上界が得られるか？

これを $mb = na$ と書き直すと、b は na を割り切る。ところが b は a と互いに素であるから、与えられた結果により b は n を割り切り、特に $b \leq n$ である。また p^n は b を割り切るから $p^n \leq b$ である。合わせて

$$p^n \leq b \leq n.$$

しかし $p \geq 2$ かつ $n > 0$ であるから、与えられた事実 $y^x > x$（$y = p, x = n$ とする）により $p^n > n$ である。この矛盾により、仮定が成り立ち得ないことがわかる。すなわち d は素因数を**一つももたない**。よって $d = 1$ であり、$b^a = d^b = 1$ となるから、

$$b = 1.$$

最後の小問

r を正の有理数とし、r^r が有理数であるとする。$r = a/b$ を既約分数で表し（a, b は正で互いに素）、$r^r = c/d$ も既約分数で表す（$r^r > 0$ より c, d は正で、互いに素）。すると

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} = \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{a} = \left(\frac{c}{d}\right)^{b} \quad \Longrightarrow \quad a^a d^b = b^a c^b,$$

となる。ここで両辺を b 乗し、分母を払った。これはまさに小問 (ii) の状況であるから、$b = 1$ であり、$r = a$ は正の整数である。

検算

- 整数の r は確かに条件を満たす。$r = 2$ のとき $r^r = 4$ である。また、$b = 1$ のときの結論 $c^b = a^a$ は単に $c = a^a$ を意味しており、そうなるべきである。
- 反例となる場合：$r = \frac{1}{2}$ のとき $r^r = 1/\sqrt{2}$ は無理数であり、結果と整合する。小問 (i) については、$\sqrt[3]{27} = 3$ であり、$\sqrt[3]{24}$ は無理数である。二つの可能性はどちらも実際に起こる。
- 互いに素な $a, b \leq 24$、$c < 200$、$d < 60$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、$a^a d^b = b^a c^b$ の解として見つかったのは $b = d = 1$ のもの（すなわち $a = 1, 2, 3$ で $c = a^a$）だけであった。

よくある間違い

- p^n と q^n が互いに素である**理由**を述べ忘れること。与えられた結果は a と b が互いに素である場合についてのものなので、累乗どうしが互いに素であることが必要である。
- $b \mid n$ という段階を経ずに、$b = na/m$ から $p^n \leq n$ を結論づけること。$mb = na$ を $b \mid n$ に変えるのは、a と b が互いに素であるという事実である。
- $(a/b)^{a/b} = c/d$ と書きながら、c/d が既約分数であることを要求しないこと。$\gcd(c, d) = 1$ がなければ、$d^b \mid b^a$ の段階が成り立たない。

STEP のその先へ

与えられた「互いに素な約数」に関する結果はユークリッドの補題（Euclid's lemma）であり、通常はベズーの等式（Bézout's identity）から証明される。これは素数への素因数分解の一意性を支える原動力である。最初の小問は $\sqrt{2}$ の無理性の一般化であり、

二番目の小問は超越数論（transcendence theory）への最初の入口である。超越数論では、ゲルフォント–シュナイダーの定理（Gelfond–Schneider theorem）により、たとえば $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は代数的数でさえないことが示される。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、これらの基礎を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。