解答例

STEP III 2013、第 4 問

純粋数学 • 1 の冪根の積

> **STEP III 2013、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.3 節「$z^{2n}+1$ の因数分解」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/z2n-plus-one.html

鍵となる考え方

$z^{2n}=-1$ の根は共役（conjugate）な組 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ として現れ、各組を掛け合わせると実数係数の 2 次式（quadratic）になる。これが因数分解（factorisation）を与える。次に、うまく選んだ z の値をひとつ代入すると、この因数分解は余弦についての主張に変わる。$z=\mathrm{i}$ ではどの 2 次式でも z^2+1 の部分が消え、$-2z\cos\theta$ の項だけが残るのである。小問 (ii) では同じ代入をすると両辺がともに 0 になってしまうので、まず $z=\mathrm{i}$ で 0 になる因数をひとつ約分しておく。

解答

因数分解

展開すると、

$$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) &= z^2 - z\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= z^2 - 2z\cos\theta + 1,\end{aligned}$$

である。ここで $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta$ を用いた。

さて、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ が $z^{2n}=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ を満たすのは、$2n\theta$ が π の奇数倍であるとき、すなわち整数 k を用いて $\theta=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ と書けるとき、かつそのときに限る。$(-\pi,\pi]$ に含まれる値

は

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \ldots, \pm\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

である。実際、$\frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$ であり、一方 $\frac{(2n+1)\pi}{2n} > \pi$ である。これらは相異なる $2n$ 個の根なので、-1 の $(2n)$ 乗根はこれで全部である：

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_k}, \qquad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$z^{2n}+1$ は次数 $2n$ のモニック（monic）な多項式であり、これら相異なる $2n$ 個の根をもつから、

$$z^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n}(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k})(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n}\left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right),$$

となる。ここで各共役な組に最初の結果を用いた。これが求める恒等式である。

小問 (i)

$z = \mathrm{i}$ とおく。各因数は

$$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta_k + 1 = -2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

となり、n は偶数なので左辺は $\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1 = 2$ である。よって

$$2 = (-2\mathrm{i})^n \prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k.$$

n が偶数のとき $(-2)^n = 2^n$ かつ $\mathrm{i}^n = (\mathrm{i}^2)^{n/2} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$ なので、$(-2\mathrm{i})^n = 2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}$ である。したがって

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}} = (-1)^{\frac{1}{2}n}\,2^{1-n},$$

となる。ここで $1/(-1)^{\frac{1}{2}n} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$ を用いた。左辺の積はちょうど $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$ であり、これで示された。

小問 (ii)

> **考えてみよう** なぜ、もう一度因数分解に $z = \mathrm{i}$ を代入するだけではいけないのだろうか？

n が奇数のとき $\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1 = 0$ なので、左辺は 0 になる。右辺では、$m = \frac{1}{2}(n+1)$ として真ん中の値 $k = m$ が $\theta_m = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ を与えるので、その因数は z^2+1 となり、これも $z = \mathrm{i}$ で 0 になる。結局 $0 = 0$ が得られるだけで、何もわからない。対処法は、まず両辺から因数 z^2+1 を取り除くことである。

与えられた事実と因数分解を用いると、

$$(1+z^2)\left(1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}\right)=(z^2+1)\prod_{k\neq m}\left(z^2-2z\cos\theta_k+1\right).$$

これらは多項式であり、z^2+1 は零多項式ではないので、これを約分してよい（多項式の割り算の結果は一意である）：

$$1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}=\prod_{k\neq m}\left(z^2-2z\cos\theta_k+1\right),$$

これは多項式としての恒等式であり、$z=\mathrm{i}$ を含むすべての z で成り立つ。

ここで $z=\mathrm{i}$ を代入する。左辺では項 $(-1)^j z^{2j}$ が $(-1)^j(-1)^j=1$ となり、項は n 個（$j=0,1,\ldots,n-1$）あるので、左辺は n である。右辺には $n-1$ 個の因数があり、それぞれ $-2\mathrm{i}\cos\theta_k$ に等しい：

$$n=(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq m}\cos\theta_k.$$

$n-1$ は偶数なので、小問 (i) とまったく同様に $(-2\mathrm{i})^{n-1}=2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ である。

積を平方の積に直すために、k と $n+1-k$ を組にする。

$$\theta_{n+1-k}=\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n}=\pi-\theta_k,$$

であるから、$\cos\theta_{n+1-k}=-\cos\theta_k$ が成り立つ。$k\neq m$ である値は、$1\leq k\leq\frac{1}{2}(n-1)$ に対する $\frac{1}{2}(n-1)$ 個の組 $\{k,\,n+1-k\}$ に分かれるので、

$$\prod_{k\neq m}\cos\theta_k=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(-\cos^2\theta_k\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}P,\qquad P=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k.$$

これらをまとめると、2つの符号 $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ の積は $+1$ になる：

$$n=2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}P=2^{n-1}P,$$

よって $P=n\,2^{1-n}$ である。P の最後の因数は $k=\frac{1}{2}(n-1)$、すなわち $\theta_k=\frac{(n-2)\pi}{2n}$ に対応するので、P はまさに

$$\cos^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}=n\,2^{1-n},$$

であり、これで示された。（$n=1$ のときは積は空であり、$1=1\cdot 2^0$ に等しいので矛盾はない。）

検算

- 小問 (i) で $n = 2$ のとき：$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2} = (-1)^1 2^{-1}$。$n = 4$ のとき積は $\frac{1}{8}$ であり、$(-1)^2 2^{-3}$ と一致する。
- 小問 (ii) で $n = 3$ のとき：$\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 3\cdot 2^{-2}$。$n = 5$ のとき、$\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{3\pi}{10} = 0.3125 = \frac{5}{16}$。
- 両方の恒等式は 39 までのすべての n についてコンピュータでも確認し、因数分解はランダムな複素数 z で検証した。

よくある間違い

- 小問 (ii) で因数分解に $z = \mathrm{i}$ をそのまま代入してしまい、$0 = 0$ しか得られない。
- 符号を落とす：小問 (i) の答えは $n \equiv 2 \pmod 4$ のとき本当に負になる。$\frac{\pi}{2}$ を超える $\frac{1}{2}n$ 個の角では $\cos\theta_k < 0$ だからである。
- $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$ を忘れ、平方をつくるときに符号を誤る。

STEP のその先へ

同じ技法、すなわち $z^N \pm 1$ を 1 の冪根（roots of unity）を用いて因数分解し、うまく選んだ点で値を求めるという方法から、$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ のような積の公式が一群として得られる（$\frac{z^n-1}{z-1}$ に $z = 1$ を代入してみよ）。このような有限積で $n \to \infty$ とすると、オイラー（Euler）の無限積（infinite product）$\sin\pi x = \pi x\prod_{k\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ に至る。これは、複素解析（complex analysis）が関数をその零点から組み立てる様子を初めて味わう例である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、1 の冪根やこれらの考え方を幾何学的に眺めるのに素晴らしい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。