解答例

STEP III 2013、第 3 問

純粋数学 ・ ベクトルと球面

> **STEP III 2013、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q3

鍵となる考え方

すべては二つの事実から導かれる。各 $\mathbf{p}_i$ が単位ベクトル（unit vector）であること、そして四つの和が $\mathbf{0}$ になることである。長さの 2 乗を内積（dot product）として展開すると、$(XP_i)^2$ は $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$ について線形（linear）な式になり、線形な項の和は $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ により消えてしまう。4 乗の場合は 2 次の項が残るので、実際の座標が必要になる。それをちょうど与えてくれるのが小問 (ii) である。

解答

内積 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$

四面体は正四面体（regular tetrahedron）なので、6 本の辺の長さはすべて等しい。$i \neq j$ のとき、

$$(P_iP_j)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\cdot(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_j|^2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = 2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j,$$

である。ここで $|\mathbf{p}_i| = 1$（各頂点は単位球面（unit sphere）上にある）を用いた。したがって辺の長さが等しいことから、すべての $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$（$i \neq j$）は同じ値をとる。その値を c とおく。

次に、$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$ と $\mathbf{p}_1$ との内積をとると、

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 1 + 3c = 0,$$

となるので $c = -\frac{1}{3}$ である。すなわち、すべての $i \neq j$ について $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = -\frac{1}{3}$ が成り立ち、示すべきことが示された。

小問 (i)

$|\mathbf{x}| = 1$ でもあるから、

$$(XP_i)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) = |\mathbf{p}_i|^2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i + |\mathbf{x}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i.$$

i について和をとり、内積の分配法則（distributive law）を用いると、

$$\sum_{i=1}^{4} (XP_i)^2 = 8 - 2\,\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) = 8 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 8,$$

となり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

$\mathbf{p}_1 = (0, 0, 1)$、$\mathbf{p}_2 = (a, 0, b)$ とすると、条件 $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = -\frac{1}{3}$ からただちに $b = -\frac{1}{3}$ を得る。さらに $|\mathbf{p}_2| = 1$ より

$$a^2 = 1 - b^2 = \tfrac{8}{9}, \qquad \text{よって} \qquad a = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

である。$a > 0$ なので正の平方根をとった。

$\mathbf{p}_3 = (u, v, w)$ とおく。次の三つの条件によってこれは決まる。

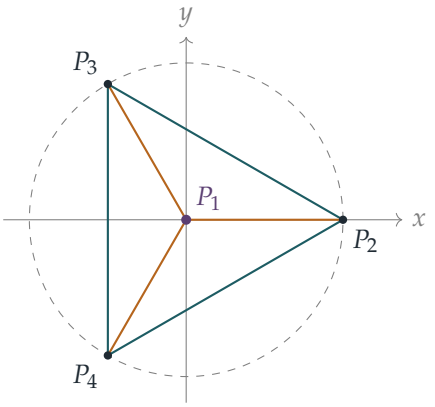
$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} &\implies w = -\tfrac{1}{3}, \\
\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} &\implies \tfrac{2\sqrt{2}}{3} u + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{1}{3} \implies u = -\tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \\
|\mathbf{p}_3| = 1 &\implies v^2 = 1 - \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{6}{9} \implies v = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{p}_4$ についてもまったく同じ方程式が成り立つので、P_3 と P_4 はこれによって得られる 2 点である（両者は異なる点でなければならないので、それぞれが一方の符号をとる）。一方の向きにラベルをつけると、

$$P_3 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\Big), \qquad P_4 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\Big).$$

（P_3 と P_4 のラベルは入れ替えてもよい。）検算として、四つの位置ベクトル（position vector）の和は確かに $\mathbf{0}$ であり、$\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 = \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$ である。

上から見ると、P_2、P_3、P_4 は平面 $z = -\frac{1}{3}$ 上で正三角形（equilateral triangle）をなし、P_1 はその中心の真上にある。



小問 (iii)

小問 (i) より $(XP_i)^2 = 2(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)$ であるから、両辺を 2 乗して

$$(XP_i)^4 = 4(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\sum_{i=1}^{4}(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2,$$

となり、示すべき式が得られる。括弧を展開し、再び $\sum \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = 0$ を用いると、

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\Big(4 - 2\sum_{i=1}^{4}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2\Big) = 16 + 4\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2.$$

? **考えてみよう** 線形な項はまた消えた。では、なぜ同じ手法で $\sum(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2$ を片づけることができないのだろうか。

2 乗の和は $\mathbf{p}_i$ について線形ではないので、$\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ がわかっていても、それについて直接は何もわからない。ここで座標の出番となる。$\mathbf{x} = (x, y, z)$ とし、小問 (ii) の頂点を用いると、

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_1 = z, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_2 = \tfrac{1}{3}(2\sqrt{2}\,x - z),$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x + \sqrt{6}\,y - z), \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x - \sqrt{6}\,y - z).$$

これらを 2 乗して加え、項ごとにまとめる。

- x^2 : $\frac{1}{9}(8+2+2) = \frac{4}{3}$; y^2 : $\frac{1}{9}(6+6) = \frac{4}{3}$; z^2 : $1 + \frac{1}{9}(1+1+1) = \frac{4}{3}$。
- xy と yz : これらは $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3$ と $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4$ にしか現れず、この二つは y の項の符号だけが異なるので、打ち消し合う。
- xz : $\frac{1}{9}\big(-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\big) = 0$。

したがって

$$\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \tfrac{4}{3}\big(x^2 + y^2 + z^2\big) = \tfrac{4}{3},$$

である。X が単位球面上にあるからである。ゆえに

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 16 + 4\cdot\tfrac{4}{3} = \frac{64}{3},$$

となり、これは X の位置によらない。以上で示すべきことが示された。

考えてみよう ここでは特定の座標を用いた。この結論は、球に内接するすべての正四面体について成り立つだろうか。

成り立つ。そのような正四面体はどれも、O のまわりに回転（rotation）させて、P_1 を $(0,0,1)$ に、P_2 を半平面 $y=0$、$x>0$ 内に移すことができる。回転は長さを保ち、X が球面全体を動けば、その回転による像も球面全体を動く。したがって、小問 (ii) の座標をとっても一般性は失われない。

検算

- $X = P_1$ とする。距離は 0 と 3 本の辺で、各辺の長さは $\sqrt{2-2(-\frac{1}{3})} = \sqrt{8/3}$ である。このとき $\sum(XP_i)^2 = 3\cdot\frac{8}{3} = 8$、$\sum(XP_i)^4 = 3\cdot\frac{64}{9} = \frac{64}{3}$ となり、二つの結果と一致する。
- P_1 の反対側の点 $X = (0,0,-1)$ をとる。このとき $XP_1 = 2$ であり、残りの 3 点については $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = \frac{1}{3}$ なので $(XP_i)^2 = \frac{4}{3}$ である。これより $4 + 3\cdot\frac{4}{3} = 8$、$16 + 3\cdot\frac{16}{9} = \frac{64}{3} \approx 21.33$ を得る。
- 球面上の数千個のランダムな点でコンピュータにより確かめたところ、毎回 8 と 21.333... が得られた。

よくある間違い

- すべての $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$ が等しいことを、理由を述べずに主張してしまう。理由は辺の長さが等しいことであり、$(P_iP_j)^2 = 2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$ を通じて導かれる。
- $|\mathbf{x}| = 1$ を忘れる。これは $(XP_i)^2 = 2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$ にも、最後の段階の $x^2+y^2+z^2=1$ にも必要である。
- 小問 (iii) の交差項での計算ミス。そこで符号を誤ると、X への見かけ上の依存が残ってしまう。

STEP のその先へ

小問 (iii) の核心は、**すべての**ベクトル $\mathbf{x}$ について成り立つ恒等式 $\sum_i (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \frac{4}{3}|\mathbf{x}|^2$ である。行列の言葉でいえば $\sum_i \mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^{\mathsf{T}} = \frac{4}{3}I$ であり、四つの頂点ベクトルは過剰な（over-complete）正規直交基底（orthonormal basis）のようにふるまう。これを**タイトフレーム**（tight frame）という。これは対称性から必ず成り立つ。この行列は正四面体のすべての回転と可換なので I の定数倍でなければならず、そのトレース（trace）は 4 だからである。球面上の点集合で、低次の平均が球面そのものの平均と一致するものを**球面デザイン**（spherical design）という。これは数値積分（numerical integration）や符号理論（coding theory）で用いられる。この背後にある線形代数（外積（outer product）、対称行列（symmetric matrix）、固有値（eigenvalue））については、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。