解答例

STEP III 2013、第 2 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 2013、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q2

鍵となる考え方

まず $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ と書いて平方根を払っておくと、1 階導関数（first derivative）の計算が楽になる。高階の関係式は、この 1 階の方程式をライプニッツの法則（Leibniz's rule）を用いて繰り返し微分すれば得られる。$x = 0$ ではほとんどの項が消え、導関数についての 2 項おきの漸化式（recurrence）が残る。これによってマクローリン級数（Maclaurin series）の係数が一つずつ求まる。最後の和は、うまく選んだ x の値で級数を評価したものに見える。

解答

1 階の方程式

分母を払って $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ とし、両辺を x で微分する。左辺には積の微分法（product rule）を用いる：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

両辺に $\sqrt{1-x^2}$（$|x| < 1$ では 0 でない）を掛けると

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy - 1 = 0,$$

となり、求める式が得られる。

高階の関係式

$\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$ を $y^{(k)}$ と書く。1階の方程式を $n+1$ 回微分する。定数1は消え、2つの積はライプニッツの法則で処理できる。$1-x^2$ の導関数は順に $-2x$、-2、その後は0であり、x の導関数は1、その後は0であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[(1-x^2)y'\right] &= (1-x^2)y^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}(-2)\,y^{(n)} \\ &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2(n+1)x\,y^{(n+1)} - n(n+1)\,y^{(n)},\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[xy\right] = x\,y^{(n+1)} + (n+1)\,y^{(n)}.$$

第1式から第2式を引いて項をまとめると、

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2(n+1)+1)x\,y^{(n+1)} - (n(n+1)+(n+1))y^{(n)} = 0,$$

すなわち

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+3)x\,y^{(n+1)} - (n+1)^2 y^{(n)} = 0.$$

ここでは $n \geq 1$ はどこにも必要なかった。1回だけ微分した場合（$n=0$）も同じ形 $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$ になり、この場合も後で用いる。

マクローリン級数

$x=0$ とおく。中央の項は因数 x を含むので消え、

$$y^{(n+2)}(0) = (n+1)^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

この漸化式は2つずつ進むので、初期値が2つ必要である。定義から $y(0) = \arcsin 0 = 0$ であり、1階の方程式で $x=0$ とおくと $y'(0) - 0 - 1 = 0$ となるので $y'(0) = 1$ である。

> **考えてみよう** この2つの値だけから、どのようにしてすべての導関数が得られるだろうか。

漸化式は $y^{(n)}(0)$ を $y^{(n+2)}(0)$ にしか結びつけないので、偶数階の導関数は $y(0)$ から始まる一つの連鎖をなし、奇数階の導関数は $y'(0)$ から始まる別の連鎖をなす。

偶数乗の項。 $y(0)=0$ であるから、漸化式より $y''(0) = 1^2 \cdot 0 = 0$、次いで $y^{(4)}(0) = 0$、以下同様に、すべての k について $y^{(2k)}(0) = 0$ である。よって x の偶数乗の係数はすべて0である。（これは、y が奇関数 $\arcsin x$ を偶関数 $\sqrt{1-x^2}$ で割った商であるから奇関数（odd function）であることと整合する。）

奇数乗の項。 漸化式を $n = 1, 3, \ldots, 2k-1$ について用いると

$$y^{(2k+1)}(0) = (2k)^2(2k-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2 \cdot y'(0) = (2 \cdot 4 \cdots 2k)^2 = (2^k\,k!)^2,$$

となり、これは $k=0$ でも成り立つ。$(2k+1)!$ で割るとマクローリン級数の係数が得られる：

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = x + \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^2\cdot 4^2}{5!}x^5 + \cdots,$$

したがって奇数次の一般項は $\dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$、偶数次の一般項は $0\cdot x^{2k}$ である。

無限和

和の第 n 項は $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ であり、$n=0$ が先頭の 1 を与える。級数と比べると因数 2^{2n} を取り除きたいので、$2^{2n}x^{2n+1}$ が 1 の定数倍になるように x を選ぶ。$x=\frac{1}{2}$ とすれば $2^{2n}(\frac{1}{2})^{2n+1}=\frac{1}{2}$ となる。よって

$$\frac{\arcsin\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

左辺は $\dfrac{\pi/6}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ であるから、

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{2^2}{5!}+\frac{2^2\times 3^2}{7!}+\cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

検算

- 既知の級数 $\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\cdots$ に $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$ を掛けると $x+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\cdots = x+\frac{2}{3}x^3+\cdots$ となり、確かに $\frac{2^2}{3!}=\frac{2}{3}$ である。
- 和の最初の 5 項は $1+0.16667+0.03333+0.00714+0.00159\approx 1.2087$ であり、すでに $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\approx 1.20920$ に近い。項は毎回およそ 4 分の 1 ずつ小さくなるので、残りの和は小さい。

よくある間違い

- ライプニッツの法則で $y^{(n)}$ の項に付く二項係数（binomial coefficient）$\binom{n+1}{2}$ を忘れること。そうすると $(n+1)^2$ が正しく得られない。
- 漸化式を $n\geq 1$ についてしか用いず、そのため $y''(0)=0$ を示さないままにすること。偶数階の連鎖には $n=0$ の場合（1 回の微分）が必要である。
- 最後の小問で $x=1$ や $x=\frac{1}{4}$ を代入すること。因数 2^{2n} は x^{2n} で打ち消されなければならず、それによって $x=\frac{1}{2}$ に決まる。

STEP のその先へ

ここでは「収束の問題は無視した」が、大学の最初の解析学の講義ではこれを厳密に扱う。比判定法（ratio test）によりこの級数の収束半径（radius of convergence）は 1 であり、剰余項付きのテイラーの定理（Taylor's theorem）を用いると、その区間の内部では級数が実際にもとの関数に等しいことが示される。係数 $\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ は中心二項係数（central binomial coefficients）と密接に関係しており、また同じ関数を 1 回積分すると $(\arcsin x)^2$ の級数が得られる。べき級数の背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。