解答例

STEP III 2013、第 13 問

確率・統計 ・ 積率と分布関数

STEP III 2013、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q13

鍵となる考え方

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$ であるから、式 $2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)$ は $(\mathrm{F}(x))^2$ の導関数（derivative）である。このため小問 (i)(b) は 1 回の部分積分（integration by parts）で済み、g をうまく選べば、Y に関するあらゆる問いが X に関する問いに変わる。不等式による評価は、f や F を小問 (i)(a) のより大きな量 M や Mx で置き換えることで得られる。その際、置き換えはいつも積分が大きくなる向きに行う。

解答

以下を通して $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ とする。したがって $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$ であり、X は $[0,1]$ に値をとるから $\mathrm{F}(0) = 0$、$\mathrm{F}(1) = 1$ である。

小問 (i)

(a) $0 \le x \le 1$ とする。すべての t について $0 \le \mathrm{f}(t) \le M$ であるから、

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^x M\,\mathrm{d}t = Mx,$$

すなわち $0 \le \mathrm{F}(x) \le Mx$ である。

(b) 合成関数の微分法（chain rule）により $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{F}(x))^2 = 2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)$ である。$u = \mathrm{g}(x)$、$\mathrm{d}v = 2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ として部分積分を行うと、$v = (\mathrm{F}(x))^2$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\mathrm{g}(x)\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\mathrm{g}(x)(\mathrm{F}(x))^2\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{g}'(x)(\mathrm{F}(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{g}(1) - \int_0^1 \mathrm{g}'(x)(\mathrm{F}(x))^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

となる。ここで $\mathrm{F}(1) = 1$、$\mathrm{F}(0) = 0$ を用いた。（g が微分可能である必要があるが、問題文では暗黙のうちにこれが仮定されている。）

小問 (ii)

(a) Y の確率密度関数（probability density function）は積分すると 1 にならなければならない。(i)(b) で $\mathrm{g}(x) = 1$ とおくと $\mathrm{g}' = 0$ であるから、

$$\int_0^1 2\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 1,$$

よって $k = 2$ である。（同じことだが、$\int_0^1 k\mathrm{Ff}\,\mathrm{d}y = \frac{k}{2}[\mathrm{F}^2]_0^1 = \frac{k}{2}$ としてもよい。）また $k\mathrm{Ff} \geq 0$ であるから、これは確かに確率密度関数になっていることにも注意しておく。

(b)

$$\mathrm{E}(Y^n) = \int_0^1 2y^n\,\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y.$$

である。

上からの評価。 (i)(a) より $\mathrm{F}(y) \leq My$ であり、残りの因子 $2y^n\mathrm{f}(y)$ は非負であるから、

$$\mathrm{E}(Y^n) \leq \int_0^1 2y^n \cdot My \cdot \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 2M\int_0^1 y^{n+1}\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 2M\mu_{n+1}.$$

下からの評価。 今度は (i)(b) を $\mathrm{g}(y) = y^n$ として用いる。$\mathrm{g}(1) = 1$、$\mathrm{g}'(y) = ny^{n-1}$ であるから、

$$\mathrm{E}(Y^n) = 1 - \int_0^1 ny^{n-1}(\mathrm{F}(y))^2\,\mathrm{d}y.$$

（$n = 0$ のときは、この積分は単に 0 である。）$\mathrm{E}(Y^n)$ を下から評価するには、この積分を**上から**評価する必要がある。

> **?** **考えてみよう** $(\mathrm{F}(y))^2$ の 2 つの因子のうち、どちらを My で置き換えるべきだろうか。

一方だけである。$0 \leq \mathrm{F}(y) \leq My$ より $(\mathrm{F}(y))^2 \leq My\,\mathrm{F}(y)$ であり、$ny^{n-1} \geq 0$ であるから、

$$\int_0^1 ny^{n-1}(\mathrm{F}(y))^2\,\mathrm{d}y \leq nM\int_0^1 y^n\mathrm{F}(y)\,\mathrm{d}y.$$

両方の因子を置き換えると $\int y^{n+1}\,\mathrm{d}y$ が残るだけで、X について何も教えてくれない。F を 1 つ残しておけば、もう一度部分積分を行って X のモーメント（moment）を作り出せる。$u = \mathrm{F}(y)$、$\mathrm{d}v = y^n\,\mathrm{d}y$ として部分積分すると、

$$\int_0^1 y^n \mathrm{F}(y)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\mathrm{F}(y)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{n+1}}{n+1}\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1-\mu_{n+1}}{n+1}.$$

以上をまとめると、

$$\mathrm{E}(Y^n) \geq 1 - \frac{nM}{n+1}(1-\mu_{n+1}) = 1 + \frac{nM}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{nM}{n+1},$$

となり、上からの評価と合わせて、求める 2 つの不等式が得られる。

(c) (b) の両端を組み合わせると、$n \geq 0$ に対して

$$1 + \frac{nM}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{nM}{n+1} \leq 2M\mu_{n+1},$$

であり、μ_{n+1} を含む項を右辺にまとめると、

$$1 - \frac{nM}{n+1} \leq \left(2M - \frac{nM}{n+1}\right)\mu_{n+1} = \frac{(n+2)M}{n+1}\,\mu_{n+1}.$$

係数 $\frac{(n+2)M}{n+1}$ は正である（f の積分が 1 であるから $M > 0$）。したがって、不等号の向きを変えずにこれで割ることができ、

$$\mu_{n+1} \geq \frac{n+1}{(n+2)M} - \frac{n}{n+2}.$$

これはすべての $n \geq 0$ について成り立つ。$m = n+1$ とおくと $m \geq 1$ であり、

$$\mu_m \geq \frac{m}{(m+1)M} - \frac{m-1}{m+1} \qquad (m \geq 1),$$

となる。これが（m を n と書き直せば）求める結果である。

検算

- 一様分布（uniform distribution）に従う X：$\mathrm{f} = 1$、$M = 1$、$\mu_n = \frac{1}{n+1}$ である。(c) の評価は $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ となり、等号で成り立つ。このとき Y の確率密度関数は $2y$ で $\mathrm{E}(Y^n) = \frac{2}{n+2}$ であり、(b) の 2 つの評価もともに $\frac{2}{n+2}$ に等しい。これは納得がいく。用いた唯一の不等式 $\mathrm{F}(y) \leq My$ は、一様分布では等式になるからである。
- $\mathrm{f}(x) = 3x^2$、$M = 3$、$n = 2$：$\mu_2 = \frac{3}{5}$ であり、評価は $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} < 0$ となるので、余裕をもって成り立つ。この確率密度関数では $\mathrm{E}(Y^2) = \frac{3}{4}$、$\mu_3 = \frac{1}{2}$ であるから、(b) の評価は $1 + 2\cdot\frac{1}{2} - 2 = 0$ と $2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 3$ であり、$\frac{3}{4}$ はその間にある。
- (i)(b) の恒等式とすべての不等式は、いくつかの確率密度関数と g のいくつかの選び方について、数値積分でも確認した。

よくある間違い

- $\big(\mathrm{F}\big)^2$ を M^2y^2 で評価してしまう。これは正しいが、X についての情報がすべて失われるため、どこにも行き着かない。
- $\mathrm{E}(Y^n)$ の式で積分の前に負号がついていることを忘れる。$\mathrm{E}(Y^n)$ を下から評価するには、積分を**上から**評価しなければならない。
- μ_{n+1} の評価で止めてしまい、添字をずらして $n \geq 1$ に対する所定の形にしていない。

STEP のその先へ

確率密度関数 $2\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)$ は偶然の産物ではない。$\mathrm{P}(\max \leq y) = \big(\mathrm{F}(y)\big)^2$ であるから、これは X と同じ分布に従う 2 つの独立（independent）な確率変数に対する $\max(X_1, X_2)$ の確率密度関数なのである。より一般に、n 個の独立な観測値のうち小さい方から r 番目のものの確率密度関数は、F と $1-\mathrm{F}$ のべきから組み立てられる。これらの**順序統計量**（order statistics）は、ノンパラメトリック統計学（non-parametric statistics）において中心的な役割を果たす。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）には、順序統計量のわかりやすい解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。