解答例

STEP III 2013、第 11 問

力学 ・ ばねとエネルギー

STEP III 2013、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q11

鍵となる考え方

すべては対称性（symmetry）によって決まる。三角形は水平を保ち、その中心はつねに吊り下げ点の真下にあり、三角形は上下にしか動けない。したがって、質点 1 つとばね 1 本を調べれば全体がわかる。ばねを含む鉛直面内の幾何から、ばねの長さが θ で表される。鉛直方向の力のつり合いから平衡状態が求まり、エネルギー保存則（conservation of energy）（弾性エネルギー、重力による位置エネルギー、運動エネルギー）から速さが求まる。

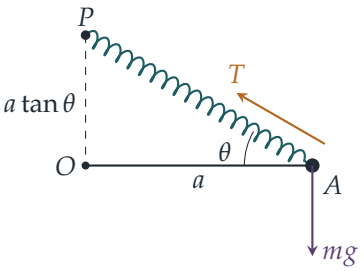
解答

モデルと幾何

おもりを質点、棒を軽い剛体、ばねを軽くフックの法則（Hooke's law）に従うものとみなす。P を吊り下げ点、O を三角形の中心とし、O は P の真下にある。1 辺 s の正三角形の中心から頂点までの距離は $s/\sqrt{3}$ であるから、各頂点は O から水平距離

$$OA = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} = a$$

の位置にある。頂点 A をとり、P、O、A を通る鉛直面を考える。



ばね PA は水平な OA と角 θ をなすので、ばねの長さは $a/\cos\theta$ であり、A は P より深さ $a\tan\theta$ だけ下にある。

張力

各ばねの伸び（extension）は

$$x = \frac{a}{\cos\theta} - a = \frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

である。よって、弾性係数（modulus of elasticity）kmg、自然長（natural length）a としてフックの法則より

$$T = \frac{kmg}{a}\,x = \frac{kmg(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

となり、示すべき式が得られた。

$\theta = \frac{1}{6}\pi$ における平衡

A にある質点にはたらく力は、重力、AP 方向のばねの張力、2 本の棒からの力である。棒は水平面内にあるので、棒からの力は水平である。

考えてみよう なぜ棒からの力を無視してよいのか。

鉛直方向に力を分解するが、棒からの力には鉛直成分がないからである。（水平方向では張力の成分 $T\cos\theta$ が棒からの力とつり合っており、そのために棒が必要なのだが、その式は使わない。）A において鉛直方向の力のつり合いを考えると

$$T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad k(1-\cos\theta)\tan\theta = 1.$$

$\theta = \frac{1}{6}\pi$ のとき $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$k\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 4\sqrt{3}+6,$$

となる。ここで $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$ を用いた。これが求める値である。

平衡位置における速さ

対称性により、三角形は中心を P の真下に保ったまま水平を保つので、3 つの質点はすべて同じ速さで鉛直に動く。重力とばね以外の外力は仕事をしないので、エネルギーは保存される。伸び x のばねに蓄えられる弾性エネルギーは $kmg\,x^2/(2a)$ である。

初めの状態（$\theta = \frac{1}{3}\pi$、**静止**）。このとき $\cos\theta = \frac{1}{2}$ であるから伸びは $x_1 = a$ であり、P からの深さは $a\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}a$ である。

平衡状態（$\theta = \frac{1}{6}\pi$）。伸びは

$$x_2 = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}, \qquad x_2^2 = \frac{a^2(7-4\sqrt{3})}{3},$$

であり、深さは $a\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{a}{\sqrt{3}}$ である。よって各質点の上昇量は

$$\sqrt{3}a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

3 本のばねから**放出される弾性エネルギー**は

$$\begin{aligned} 3\cdot\frac{kmg}{2a}\left(x_1^2 - x_2^2\right) &= \frac{3kmg}{2a}\cdot\frac{a^2(3-7+4\sqrt{3})}{3} \\ &= 2kmga(\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

$k = 4\sqrt{3}+6$ のとき $k(\sqrt{3}-1) = 12-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6 = 6+2\sqrt{3}$ であるから、放出される弾性エネルギーは $4mga(3+\sqrt{3})$ である。

3 つの質点が**得る重力による位置エネルギー**は $3mg\cdot\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,mga$ である。

その差が、それぞれ速さ V で動く 3 つの質点の運動エネルギーになる。

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}mV^2 &= 4mga(3+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\,mga = mga\left(12+2\sqrt{3}\right), \\ V^2 &= \frac{2ag}{3}\left(12+2\sqrt{3}\right) = \frac{4ag}{3}\left(6+\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 符号：$\theta = \frac{1}{3}\pi$ において各ばねが引く力の鉛直成分は $T\sin\theta = kmg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 11.2\,mg > mg$ であるから、エネルギーの式で仮定したとおり、三角形はまず平衡位置に向かって**上向きに**動き出す。
- 答えは正であり、速さの 2 乗の次元（ag）をもつ。

- $a = 1.3\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として、運動方程式 $\ddot{y} = g - \frac{T}{m}\sin\theta$ を $\theta = \frac{1}{3}\pi$ での静止状態から数値的に時間発展させると、$\theta = \frac{1}{6}\pi$ において $V^2 \approx 131.48\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ となり、$\frac{4ag}{3}(6+\sqrt{3})$ と一致する。

よくある間違い

- 中心から頂点までの距離を a ではなく $\sqrt{3}a$ や $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ としてしまう。
- ばねも質点も 3 つずつあることを忘れる。因数 3 は弾性エネルギー、位置エネルギー、運動エネルギーのすべての項に現れる。
- 運動の向きを取り違える。2 つの位置の間で質点は**上昇する**ので、重力による位置エネルギーは失われるのではなく増加する。

STEP のその先へ

ここで三角形の自由度（degree of freedom）が 1 しかないのは、対称性によってほかのあらゆる運動が排除されるからである。1 つの座標（ここでは θ、あるいは深さ y）を選び、エネルギーをその座標で表すことは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。また、平衡点のまわりで位置エネルギーを展開すれば、鉛直方向の微小振動（small oscillations）の周期も求まる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方でエネルギーを用いる方法と微小振動を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。