解答例

STEP III 2013、第 10 問

力学 ・ 回転を伴う撃力

STEP III 2013、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

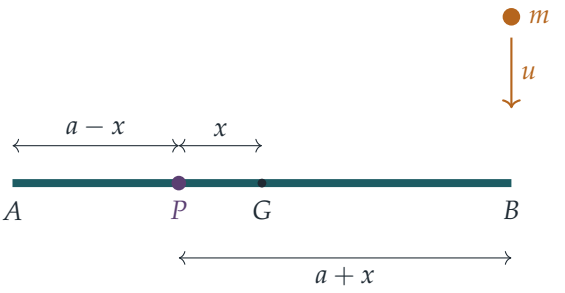
step.maths.org/questions/13-s3-q10

鍵となる考え方

棒の中心が P からどれだけ離れているかに気づけば、慣性モーメント（moment of inertia）は平行軸の定理（parallel axis theorem）からただちに求まる。衝突については、回転軸が棒に未知の力積（impulse）を及ぼすので、運動量（linear momentum）は保存されない。しかし、その力積は P を通って作用するので、P のまわりのモーメントをもたない。P のまわりの角運動量（angular momentum）保存則と、B におけるニュートンの実験則（Newton's experimental law）を合わせれば、2 つの未知数に対する 2 本の方程式が得られる。

解答

棒を一様な剛体（rigid body）の棒、粒子を質点とみなし、衝突は瞬間的に起こるとモデル化する。すると、水平方向の力積は B におけるものと回転軸におけるものだけである（重力のような有限の大きさの力は、衝突の瞬間には力積を与えない）。



慣性モーメント

G を棒の中点、すなわち重心（centre of mass）とする。$AG = a$、$AP = a - x$ であるから、距離 PG は x である（$x > 0$ のとき、G は P から見て B の側にある）。一様な棒の、中心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{1}{3}Ma^2$ である（長さ $2a$ の棒の場合）。平行軸の定理より

$$I_P = \tfrac{1}{3}Ma^2 + Mx^2 = \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2),$$

となり、示すべき式が得られた。

定義から直接計算したければ、次のようにすればよい。線密度（line density）を $M/(2a)$ とし、s を P から棒に沿って測った位置とすると、棒は $s = -(a - x)$ から $s = a + x$ までにわたっていて、

$$I_P = \frac{M}{2a}\int_{-(a-x)}^{a+x} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{M}{6a}[(a+x)^3 + (a-x)^3] = \frac{M}{6a}(2a^3 + 6ax^2),$$

となり、同じ結果である。

衝突

P から B までの距離は $2a - (a - x) = a + x$ である。衝突直後の粒子の速度（最初の運動の向きを正とする）を v、棒の角速度（angular velocity）を ω とする。このとき B は同じ向きに速さ $(a + x)\omega$ で動く。

考えてみよう なぜここでは運動量保存則が使えないのだろうか？

回転軸は固定されているので、衝突の間に棒に大きさの分からない力積を与える。その力積は P に作用するので、P のまわりのモーメントは 0 である。粒子と棒の間の力積は、棒と粒子からなる系の内力によるものである。したがって、P のまわりの系全体の角運動量は保存される：

$$mu(a + x) = mv(a + x) + I_P\,\omega. \tag{1}$$

B におけるニュートンの実験則（遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である）より

$$(a + x)\omega - v = eu. \tag{2}$$

(2) より $v = (a + x)\omega - eu$ である。これを (1) に代入すると

$$mu(a + x) = m(a + x)[(a + x)\omega - eu] + I_P\,\omega$$
$$mu(1 + e)(a + x) = [m(a + x)^2 + \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2)]\omega.$$

両辺に 3 を掛けて

$$\omega = \frac{3mu(1 + e)(a + x)}{M(a^2 + 3x^2) + 3m(a + x)^2},$$

となり、与えられた結果が得られる。

$m = 2M$ の場合

$m = 2M$ とおいて M を約分すると

$$\omega = \frac{6u(1+e)(a+x)}{a^2+3x^2+6(a+x)^2}.$$

自然に現れる変数は腕の長さ $s = a + x$、すなわち距離 PB であり、これは $[0, 2a]$ に属する。$x = s - a$ とすると、分母は

$$a^2 + 3(s-a)^2 + 6s^2 = 9s^2 - 6as + 4a^2,$$

となるので

$$\omega = \frac{6u(1+e)\,s}{9s^2 - 6as + 4a^2}.$$

$s = 0$（回転軸が B にある場合）では $\omega = 0$ であるから、最大値は $s > 0$ でとられる。そこでは分子と分母を s で割ることができて

$$\omega = \frac{6u(1+e)}{9s + \dfrac{4a^2}{s} - 6a}.$$

分母をできるだけ小さくしたい。$s > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より

$$9s + \frac{4a^2}{s} \;\geq\; 2\sqrt{9s \cdot \frac{4a^2}{s}} = 12a,$$

であり、等号が成り立つのはちょうど $9s = 4a^2/s$、すなわち $s = \frac{2}{3}a$ のときである。これは確かに $(0, 2a]$ に属する。よって分母は $12a - 6a = 6a$ 以上であり、等号は $s = \frac{2}{3}a$ のときに限って成り立つ。したがって

$$\omega \leq \frac{6u(1+e)}{6a} = \frac{u(1+e)}{a}.$$

ゆえに角速度の最大値は $u(1+e)/a$ であり、それは $a + x = \frac{2}{3}a$、すなわち

$$x = -\tfrac{1}{3}a.$$

のときにとられる。負の符号は、単に P が中心から見て B の側にあることを意味する。P は A から距離 $\frac{4}{3}a$、B から距離 $\frac{2}{3}a$ の位置にある。

検算

- $x = a$（回転軸が A にある場合）かつ $e = 1$ のとき、公式は $\omega = 3mu/\big(a(M+3m)\big)$ を与える。$M \to 0$ とすると $\omega = u/a$ となり、B は速さ $2u$ で動く。これは、非常に軽い「標的」に弾性衝突したときのおなじみの結果である。

- 最適な場合で $a = 1$、$u = 1$、$e = \frac{1}{2}$ とすると、棒は $\omega = 1.5$ で回転するので B は速さ 1 で動き、衝突後の粒子の速度は $v = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ である。このとき P のまわりの角運動量は $2M \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}M\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 1.5 = \frac{4}{3}M$ となり、衝突前の $2M \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$ と一致する。
- $x \in [-a, a]$ についてコンピュータで細かく探索すると、最大値が $x = -a/3$ でとられることが確かめられる。

よくある間違い

- 運動量保存則を使ってしまう：固定された回転軸が力積を与えるので、保存されるのは P のまわりの角運動量だけである。
- 距離 PB を $a + x$ ではなく $a - x$ や $2a - x$ としてしまう。
- $x = -\frac{1}{3}a$ を負だからという理由で捨ててしまう：x は符号付きの位置であり、$[-a, a]$ のどの x に対しても P は棒の上にある。

STEP のその先へ

未知の反力が消えるようにモーメントをとる点を選ぶのは、剛体力学において最も役に立つ技法の 1 つである。これは「打撃の中心（centre of percussion）」にも再び現れる。打撃の中心とは、バットや棒のうち、そこを打っても支点に力積が生じない点のことである。大学 1 年の力学では、これが角運動量と慣性テンソル（inertia tensor）の一般論へと発展する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、撃力による回転と打撃の中心を非常に分かりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。