解答例

STEP III 2013、第 1 問

純粋数学 ・ 半角の置換

> **STEP III 2013、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q1

鍵となる考え方

半角置換（half-angle substitution）$t = \tan\frac{1}{2}x$ を用いると、$\sin x$ の任意の有理関数（rational function）は t の有理関数に変わる。したがって最初の積分は $\int \mathrm{d}t/(2\text{次式})$ の形になり、これは平方完成（completing the square）によって計算できる。そのうえで答えを求められた形にするには、$\tan(A-B)$ の公式が必要になる。I_n については、厄介な分母が約分されるようにヒントが工夫されている。すなわち $\sin^{n+1}x + 2\sin^n x = \sin^n x\,(2+\sin x)$ である。これにより I_0 から順に上っていく漸化式（recurrence）が得られる。前半の結果が本当に必要になるのは I_0 だけである。

解答

置換

$t = \tan\frac{1}{2}x$ とおくと、連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1+\tan^2\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}(1+t^2).$$

正弦については、倍角の公式（double-angle formula）を用いてから $\cos^2\frac{1}{2}x = 1/\sec^2\frac{1}{2}x$ と書き換える：

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = 2\tan\tfrac{1}{2}x\cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

以上で両方の結果が示された。

最初の積分

x が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、t は $\tan 0 = 0$ から $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ まで動き、$\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ である。また

$$1 + a\sin x = \frac{1 + t^2 + 2at}{1+t^2},$$

であるから、因数 $1+t^2$ が約分されて

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2at+1} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+a)^2+(1-a^2)}.$$

$0 < a < 1$ より定数 $1-a^2$ は正である。そこで $r = \sqrt{1-a^2}$ とおく。$\int \mathrm{d}u/(u^2+r^2) = \frac{1}{r}\arctan\frac{u}{r}$ を用いると

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{r}\Big[\arctan\frac{t+a}{r}\Big]_0^1 = \frac{2}{r}(\alpha-\beta),$$

となる。ただし

$$\tan\alpha = \frac{1+a}{r} = \frac{1+a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}, \qquad \tan\beta = \frac{a}{r},$$

であり、$\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ である。

考えてみよう これは求めたい答えの形には見えない。2 つの逆正接の差を 1 つの逆正接にまとめるにはどうすればよいだろうか。

差の正接をとればよい。

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{(1+a)-a}{r} = \frac{1}{r}, \qquad 1 + \tan\alpha\tan\beta = 1 + \frac{a(1+a)}{1-a^2} = 1 + \frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

であるから

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1-a}{r} = \frac{1-a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}.$$

逆関数をとる前に、$\alpha-\beta$ が arctan の値域 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていることを確かめる必要がある。実際に入っている。両方の角は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ にあり、しかも $\tan\alpha > \tan\beta$（その差は $1/r > 0$）なので、$0 < \alpha - \beta < \frac{1}{2}\pi$ である。よって $\alpha - \beta = \arctan\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}$ であり、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}},$$

が示された。

I_3 の計算

ヒントに従うと

$$I_{n+1}+2I_n=\int_0^{\frac12\pi}\frac{\sin^n x\,(\sin x+2)}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

$n=0,1,2$ に対する右辺が必要である：

$$\int_0^{\frac12\pi}1\,\mathrm{d}x=\tfrac12\pi,\qquad\int_0^{\frac12\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=1,\qquad\int_0^{\frac12\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12\pi}\tfrac12(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\tfrac14\pi.$$

考えてみよう この漸化式は各 I_n を次の項と結びつけるが、出発点はどこだろうか。

I_0 は別に求める必要があり、ここで前半の結果が役に立つ。因数 2 をくくり出して $a=\frac12$ とすると

$$\begin{aligned}I_0=\int_0^{\frac12\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}&=\frac12\int_0^{\frac12\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac12\sin x}=\frac12\cdot\frac{2}{\sqrt{3/4}}\arctan\frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3/2}}\\&=\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{1}{\sqrt3}=\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt3}.\end{aligned}$$

あとは漸化式 $I_{n+1}=\int_0^{\frac12\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x-2I_n$ を順に上っていけばよい：

$$\begin{aligned}I_1&=\tfrac12\pi-2I_0=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3\sqrt3},\\I_2&=1-2I_1=1-\pi+\frac{4\pi}{3\sqrt3},\\I_3&=\tfrac14\pi-2I_2=\frac{\pi}{4}-2+2\pi-\frac{8\pi}{3\sqrt3}.\end{aligned}$$

したがって

$$I_3=\frac{9\pi}{4}-\frac{8\sqrt3\,\pi}{9}-2.$$

検算

- $a\to0$ のとき、最初の結果は $\int_0^{\frac12\pi}1\,\mathrm{d}x=\frac12\pi$ を与えるはずである。実際、$2\arctan1=\frac12\pi$ に収束する。
- $[0,\frac12\pi]$ 上で $0\le\sin^3x/(2+\sin x)\le\frac13$ であるから、$0<I_3<\frac16\pi\approx0.52$ でなければならない。得られた答えは $I_3\approx0.2318$ であり、I_3 の数値積分とも小数点以下何桁にもわたって一致する。同様に $I_0=\pi/(3\sqrt3)\approx0.6046$ であり、当然そうあるべきとおり $\frac{\pi}{6}$ と $\frac{\pi}{4}$ の間にある。

- 区間上で $0 \le \sin x \le 1$ であるから、値は $I_0 > I_1 > I_2 > I_3 > 0$ と減少するはずであり、実際にそうなっている。

よくある間違い

- 積分区間を $t = 0$ と $t = 1$ に変更し忘れる、あるいは $\mathrm{d}x$ から生じる因数 $2/(1+t^2)$ を付け忘れる。
- $\alpha - \beta$ が $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入ることを確かめずに、$\tan(\alpha-\beta)$ から $\alpha - \beta = \arctan(\dots)$ と結論してしまう。
- 最初の結果を $a = 2$ として I_0 に適用してしまう。この結果は $0 < a < 1$ のときにしか成り立たないので、先に因数 2 をくくり出さなければならない。

STEP のその先へ

$t = \tan\frac{1}{2}x$ による置換（ワイエルシュトラス（Weierstrass）置換（Weierstrass substitution）と呼ばれることが多い）を用いると、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数が初等的な原始関数（antiderivative）をもつことがわかる。t の有理関数はどれも部分分数分解（partial fractions）で処理できるからである。幾何学的には、これは単位円の立体射影（stereographic projection）によるパラメータ表示 $(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ であり、有理数 t からすべてのピタゴラス数（Pythagorean triple）を生み出すものでもある。また $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x/(1+a\sin x)$ のような積分は、複素解析（complex analysis）における周回積分（contour integration）の最初の応用例として古典的なものである。その理由を知るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）がすばらしい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。