解答例

STEP II 2013、第 9 問

力学 ・ つり合いにおける摩擦

> **STEP II 2013、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q9

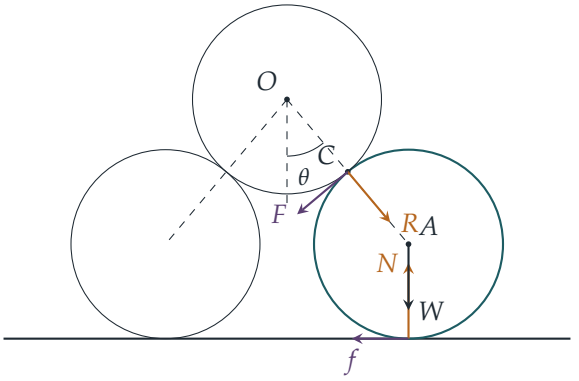
鍵となる考え方

仕事の大半は対称性（symmetry）がやってくれる。3 枚の円板をまとめて 1 つの系とみなせば、地面からの抗力はすぐに求まる。次に下の円板の中心のまわりのモーメント（moment）を考える。地面での摩擦力（friction）と上の円板からの摩擦力はどちらも接線に沿って働くので、腕の長さ（lever arm）は同じ（半径）であり、大きさは等しくなければならない。これがわかれば、下の円板と上の円板それぞれについて力を分解することで、2 つの未知数に対する 2 つの方程式が得られる。

解答

円板は半径 r、重さ W の同一の一様な剛体（rigid body）の円板であり、すべて同一の鉛直面内にあるとモデル化する。上の円板の中心を O、右下の円板の中心を A とすると、$OA = 2r$ であり、OA は鉛直下向きと角 θ をなす。これら 2 枚の円板の接点 C は OA の中点である。

左右の対称性により、左下の円板に働く力は右下の円板に働く力の鏡像になっているので、右下の円板だけを考えればよい。右下の円板は、C において OA に沿った垂直抗力（normal reaction）R（O から遠ざける向き）と、共通接線に沿った摩擦力 F を受ける。地面では垂直抗力 N と摩擦力 f を受ける。



図は右下の円板に働く力を示している。ニュートンの第 3 法則（Newton's third law）により、上の円板は C において逆向きの R と F を受ける。したがって摩擦力は上の円板を接線に沿って上向きかつ外向きに押す。

小問 (i)

3 枚の円板をまとめて 1 つの系とみなす。円板どうしの間の力は内力であり打ち消し合うので、外力は 3 つの重力と地面からの力だけである。2 つの地面からの抗力は対称性により等しく、地面での摩擦力は水平であるから、鉛直方向に力を分解すると

$$2N = 3W \quad \Longrightarrow \quad N = \tfrac{3}{2}W,$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii)

考えてみよう 下の円板には R、F、f の 3 つの未知数があるように見える。3 つ目の方程式はどこから得られるだろうか。

モーメントから得られる。右下の円板について A のまわりのモーメントを考える。重力 W、垂直抗力 N、垂直抗力 R はいずれも A を通るので、モーメントをもたない。摩擦力 f は最下点での接線に沿って、F は C での接線に沿って働くので、どちらも腕の長さは r である。これらは円板を互いに逆向きに回そうとしなければならないので、

$$fr = Fr \quad \Longrightarrow \quad f = F.$$

（これにより図の力の向きも定まる。円板は外向きに押されるので f は内向きであり、そのモーメントと釣り合うためには、下の円板に働く F は接線に沿って下向きかつ内向きでなければならない。）

O から A への単位ベクトルは $(\sin\theta, -\cos\theta)$ であり、下の円板に働く F の接線方向は $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ である。下の円板について水平方向に分解すると、

$$R\sin\theta - F\cos\theta - f = 0 \quad \Longrightarrow \quad R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

となる。ここで $f = F$ を用いた。

上の円板については、2 つの接点から等しい上向き成分 $R\cos\theta + F\sin\theta$ がそれぞれ働く。鉛直方向に分解すると、

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = W.$$

$F = \dfrac{R\sin\theta}{1+\cos\theta}$ を代入すると、

$$W = 2R\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2R\cdot\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = 2R\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = 2R.$$

よって、接している 2 枚の円板の間の垂直抗力は

$$R = \tfrac{1}{2}W,$$

であり、θ によらない。すると

$$F = \frac{R\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{W\sin\theta}{2(1+\cos\theta)},$$

となり、これが求める摩擦力である。

整合性の確認として、下の円板について鉛直方向に分解すると $N = W + R\cos\theta + F\sin\theta = W + \frac{1}{2}W = \frac{3}{2}W$ となり、小問 (i) と一致する。

小問 (iii)

半角の公式（half-angle formulae）$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ と $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ を用いると、

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

釣り合い（equilibrium）のためには、すべての接点で摩擦力が最大摩擦力（limiting friction）を超えてはならない。円板どうしの間では $F \le \mu R$、すなわち

$$\tan\tfrac{\theta}{2} \le \mu.$$

が必要である。（地面では $f \le \mu N$、すなわち $\frac{1}{2}W\tan\frac{\theta}{2} \le \frac{3}{2}\mu W$ が必要である。これはより弱い条件なので、問題になるのは円板どうしの接点である。）

考えてみよう θ をいくらでも小さくして $\tan\frac{\theta}{2}$ をごく小さくすることを妨げているのは何だろうか。

下の 2 枚の円板は互いに接していない。それらの中心間の距離は $2\cdot 2r\sin\theta = 4r\sin\theta$ であり、これは $2r$ より大きくなければならないので、$\sin\theta > \frac{1}{2}$ である。$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\theta > \frac{\pi}{6}$、したがって $\frac{\theta}{2} > \frac{\pi}{12}$ である。tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ で増加するので、

$$\tan\frac{\theta}{2} > \tan\frac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

よって釣り合いには $\mu \geq \tan\frac{\theta}{2} > 2-\sqrt{3}$ が必要である。$\mu < 2-\sqrt{3}$ ならば、これを満たす許される θ の値は存在せず、釣り合いは不可能である。

検算

- $\theta \to 0$ のとき、上の円板は他の円板の真上に載り、$F \to 0$ となる。予想どおり摩擦力は必要ない。
- 任意の角、たとえば $\theta = 1$ ラジアンについて、$R = \frac{1}{2}W$、$F = f = \frac{1}{2}W\tan\frac{1}{2}$、$N = \frac{3}{2}W$ を代入すると、各円板について力の両成分とモーメントがすべて釣り合う。
- $2-\sqrt{3} \approx 0.2679$ であり、これは $\tan 15^\circ \approx 0.2679$ と一致する。30° をわずかに超える範囲で θ を数値的に走査すると、$\mu = 0.2679$ では釣り合いが不可能であり、$\mu = 0.268$ では可能であることが確かめられる。

よくある間違い

- 円板どうしの間の摩擦力を 0 と仮定したり、まったく考え忘れたりすること。それがなければ下の円板のモーメントの方程式から $f = 0$ となり、下の円板が滑って離れていくのを止めるものは何もなくなる。
- 下の円板どうしが接しないという条件を見落とすこと。これが θ を下から押さえる唯一の条件であり、$2-\sqrt{3}$ はここから出てくる。
- F の向きを間違えること。推測に頼らず、A のまわりのモーメントの方程式を使って向きを決めるとよい。

STEP のその先へ

この問題が静定（statically determinate）になるのは、対称性とモーメントの方程式のおかげにすぎない。粗い物体を積み重ねた多くの場合、摩擦力は釣り合いだけからは求められず、技術者は物体の変形の仕方をモデル化する必要がある。$F/R = \tan\frac{\theta}{2}$ という美しい結果は、摩擦角（friction angle）の考え方の一例である。すなわち、釣り合いが可能であるのは、接触力の合力が法線から角 $\arctan\mu$ 以内にあるときに限る。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年生のレベルで摩擦と剛体の静力学を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。