解答例

STEP II 2013、第 8 問

純粋数学 ・ 微積分と不等式

> **STEP II 2013、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q8

鍵となる考え方

f は減少関数（decreasing function）なので、領域は右へ進むほど低くなる一方の「階段」のような形をしている。したがって最良の長方形は左下の隅、すなわち直線 $y = \mathrm{f}(t)$ の上で y 軸に接する位置にあり、その右上の頂点は曲線上にある。これにより小問 (i) は 1 変数関数の最大化に帰着する。小問 (ii) では二つの面積、すなわち領域全体とその内部の長方形の面積を比較し、小問 (iii) では $\mathrm{f}(x) = 1/(1+x)$ の場合にすべてを具体的に計算するだけである。

解答

小問 (i)

領域は $\{(x,y) : 0 \le x \le t,\ \mathrm{f}(t) \le y \le \mathrm{f}(x)\}$ である。f は減少関数なので、$x < t$ では曲線は直線 $y = \mathrm{f}(t)$ より上にある。

領域内にある任意の長方形 $[a,b] \times [c,d]$ をとる。その下辺は $c \ge \mathrm{f}(t)$、左辺は $a \ge 0$ を満たさなければならず、右上の頂点 (b,d) は領域内になければならないので、$b \le t$ かつ $d \le \mathrm{f}(b)$ である。よってその面積は高々

$$b(\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(t)),$$

であり、この値は長方形 $[0,b] \times [\mathrm{f}(t), \mathrm{f}(b)]$ によって実現される。この長方形は実際に領域内に収まる。$0 \le x \le b$ に対して $\mathrm{f}(x) \ge \mathrm{f}(b)$ なので、長方形は曲線の下にあるからである。したがって

$$A_0(t) = \max_{0 \le x \le t} R(x), \qquad R(x) = x(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)).$$

ここで $R(0) = R(t) = 0$ であり、$0 < x < t$ では $R(x) > 0$ であるから、$t > 0$ のとき最大値は内点 $x_0 \in (0, t)$ でとられ、そこで $R'(x_0) = 0$ となる：

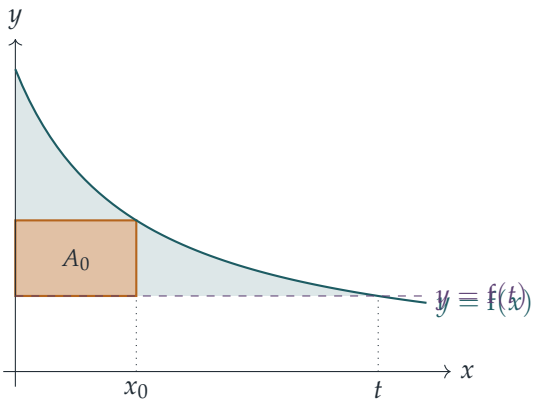
$$R'(x) = \mathrm{f}(x) + x\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0\mathrm{f}'(x_0) + \mathrm{f}(x_0) = \mathrm{f}(t).$$

よって、x_0 がこの条件を満たすとき $A_0(t) = x_0(\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(t))$ であり、題意は示された。（$t = 0$ のときは領域の幅がなく、$A_0(0) = 0$ であり、$x_0 = 0$ は自明に条件を満たす。）

小問 (ii)

$t\,\mathrm{g}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ とおく。両辺を微分する。左辺には積の微分法（product rule）を、右辺には微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）を用いると、

$$\mathrm{g}(t) + t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) \quad \Longrightarrow \quad t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t).$$



積分 $\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x$ は、$0 \le x \le t$ において曲線と直線 $y = \mathrm{f}(t)$ に挟まれた、網掛けの領域の面積にちょうど等しい。小問 (i) の最適な長方形はこの領域の内部にあるが、領域を埋め尽くしてはいない。$x_0 < x < t$ では長方形の寄与はないが、f は狭義減少なので、そこでの領域の高さは $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t) > 0$ である。したがってこの細長い部分の面積は正であり、

$$\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x > A_0(t).$$

? **考えてみよう** 左辺を g' を含む式に変形するにはどうすればよいか？

積分を分け、g の定義を用いてから、先ほど示した結果を使う：

$$\begin{aligned}\int_0^t \big(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x &= t\,\mathrm{g}(t)-t\,\mathrm{f}(t)\\ &= -t\big(\mathrm{f}(t)-\mathrm{g}(t)\big)\\ &= -t\cdot t\,\mathrm{g}'(t) = -t^2\mathrm{g}'(t).\end{aligned}$$

よって $-t^2\mathrm{g}'(t) > A_0(t)$ である。

小問 (iii)

ここで $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{1+x}$ は $x\geq 0$ において正かつ狭義減少であるから、これまでの議論はすべて適用できる。

左辺。小問 (ii) の最後の計算より、

$$-t^2\mathrm{g}'(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \frac{t}{1+t} = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}.$$

長方形。 $\mathrm{f}'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ であるから、

$$x\mathrm{f}'(x)+\mathrm{f}(x) = \frac{-x+(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2},$$

となり、x_0 に対する条件は $(1+x_0)^2 = 1+t$ である。$s=\sqrt{1+t}$ とおくと、$s>1$ かつ $x_0 = s-1$ である（正の根をとる。$0<x_0<t$ に注意）。このとき $1+t=s^2$ であり、

$$A_0(t) = (s-1)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{(s-1)^2}{s^2} = \left(1-\frac{1}{s}\right)^2.$$

考えてみよう 両辺とも複雑に見える。自然な変数は何か？

s を用いるとすべてが簡潔になる。$\ln(1+t) = 2\ln s$ かつ $\dfrac{t}{1+t} = 1-\dfrac{1}{s^2}$ であるから、$-t^2\mathrm{g}'(t) > A_0(t)$ は次のようになる：

$$\begin{aligned}&2\ln s - 1 + \frac{1}{s^2} > 1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\\ \iff\quad &2\ln s > 2 - \frac{2}{s}\\ \iff\quad &\ln s > 1 - \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

$s=\sqrt{1+t}$ であり $\ln s = \ln\sqrt{1+t}$ であるから、これは

$$\ln\sqrt{1+t} > 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \qquad (t>0),$$

となり、題意は示された。

検算

- $t = 3$ のとき：$s = 2$、$x_0 = 1$、$A_0 = \frac{1}{4}$ であり、領域の面積は $\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.636 > 0.25$ である。最後の不等式は $\ln 2 \approx 0.693 > 0.5$ となる。
- 多くの t の値について長方形の面積 $x\big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)$ を直接探索し、最大値が $(1 - 1/\sqrt{1+t})^2$ であって $x = \sqrt{1+t} - 1$ でとられることをコンピュータで確認した。
- $t \to 0^+$ のとき、最後の不等式の両辺はともに 0 に収束する。展開すると $\ln s \approx (s-1) - \frac{1}{2}(s-1)^2$、$1 - \frac{1}{s} \approx (s-1) - (s-1)^2$ であるから、左辺が約 $\frac{1}{2}(s-1)^2$ だけ大きく、期待どおりである。

よくある間違い

- 最良の長方形の頂点が曲線上にあることを断りなく仮定してしまう。小問 (i) のように、減少性を用いる必要がある。
- 面積の不等式が**狭義**である理由を述べ忘れる。長方形は領域のうち $x_0 < x < t$ の部分を覆っていない。
- 負の根 $1 + x_0 = -\sqrt{1+t}$ をとってしまう。これは $x_0 < 0$ を与える。

STEP のその先へ

最後の不等式 $s > 1$ に対する $\ln s > 1 - 1/s$ は、$\int_1^s \mathrm{d}u/u$ を長方形と比較して得られる古典的な評価 $1 - \frac{1}{s} < \ln s < s - 1$ の片方である。この問題は、より巧妙な幾何的な道筋でそこに到達している。積分を長方形の面積と比較することはリーマン積分（Riemann integral）の核心であり、大学 1 年の解析学の講義では上限和と下限和からこれを丁寧に構成する。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は非常に読みやすい解説を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。