解答例

STEP II 2013、第 7 問

純粋数学 • ペル方程式の解

> **STEP II 2013、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q7

鍵となる考え方

$x^2 - 2y^2 = 1$ の形の方程式はペル方程式（Pell equation）である。解が一つ見つかれば、ある決まった線形写像（linear map）によってさらに無数の解が得られる。小問 (i) と (ii) では、これらの解を、平方数（square）でもある三角数（triangular number）と結びつける。小問 (iii) の鍵は、a^2 を移項し、$c^4 - a^2$ を二つの平方の差（difference of two squares）として因数分解することである。b は素数（prime）なので、b^3 を二つの因数に分ける方法はごくわずかしかない。そして最後の部分では、小問 (ii) から素数でない b が得られる。

解答

小問 (i)

明らかな解は $x = 1, y = 0$ である。$1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$ だからである。

次に $p^2 - 2q^2 = 1$ と仮定する。すると

$$\begin{aligned}(3p + 4q)^2 - 2(2p + 3q)^2 &= (9p^2 + 24pq + 16q^2) - 2(4p^2 + 12pq + 9q^2) \\ &= p^2 - 2q^2 = 1,\end{aligned}$$

となる。pq の項が打ち消し合うからである。よって $x = 3p + 4q, y = 2p + 3q$ も解であり、示すべきことが示された。

これを $(p, q) = (1, 0)$ に適用すると $(3, 2)$ が得られ、さらに $(3, 2)$ に適用すると $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 2,\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = (17, 12)$ が得られる。確認：$9 - 8 = 1$、$289 - 288 = 1$。し

たがって、x が正の奇数、y が正の偶数である解として、次の二つがある。

$$(x,y) = (3,2) \quad \text{および} \quad (x,y) = (17,12).$$

（実際、$3p + 4q \equiv p \pmod 2$ なのでこの写像は常に x を奇数のまま保ち、$2p + 3q \equiv q \pmod 2$ なので y が一度偶数になれば偶数のまま保つ。よって、この連鎖の以降の解もすべて正しい偶奇をもつ：$(99,70)$、$(577,408)$ などである。）

小問 (ii)

x を奇数、y を偶数とし、m, n を整数として $x = 2m+1, y = 2n$ と書く。すると $(*)$ は

$$(2m+1)^2 - 2(2n)^2 = 1 \iff 4m^2 + 4m = 8n^2 \iff n^2 = \tfrac{1}{2}m(m+1),$$

となる。最後の段階では 8 で割った。これが求める形である。（各段階はすべて逆にたどれるので、このような x と y に対して二つの方程式は同値である。）

したがって n^2 は三角数 $1 + 2 + \cdots + m$ である。小問 (i) より、$(3,2)$ からは $m = 1$, $n = 1$（すなわち $1 = 1$）が、$(17,12)$ からは $m = 8, n = 6$（すなわち $36 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9$）が得られる。小問 (iii) では後者を用いる。

小問 (iii)

移項して平方の差として因数分解すると、

$$b^3 = c^4 - a^2 = (c^2 - a)(c^2 + a).$$

$b^3 > 0$ かつ $c^2 + a > 0$ なので、因数 $c^2 - a$ も正の整数である。また $a > 0$ なので $c^2 - a < c^2 + a$ である。

考えてみよう b^3 を二つの正の整数の積として表す方法は何通りあるか？

b は素数なので、b^3 の正の約数は $1, b, b^2, b^3$ のみである。したがって、b^3 を小さい因数と大きい因数の積に分解する方法は $1 \times b^3$ と $b \times b^2$ だけである。他にはなく、また b^3 は平方数ではないので、二つの因数が等しくなることはない。

場合 1：$c^2 - a = 1$ かつ $c^2 + a = b^3$。辺々を足し引きすると、

$$c^2 = \tfrac{1}{2}(b^3 + 1), \qquad a = \tfrac{1}{2}(b^3 - 1).$$

場合 2：$c^2 - a = b$ かつ $c^2 + a = b^2$。辺々を足し引きすると、

$$c^2 = \tfrac{1}{2}b(b+1), \qquad a = \tfrac{1}{2}b(b-1).$$

（問題が求めているのはこれらの式だけだが、どちらの場合が実際に起こるかを知っておく価値はある。場合 2 は決して起こらない。$b = 2$ のときは $c^2 = 3$ が必要になる。b

が奇素数なら、$1 \le \frac{1}{2}(b+1) < b$ なので b と $\frac{1}{2}(b+1)$ は互いに素（coprime）であり、その積が平方数 c^2 なので、それぞれが平方数でなければならない。しかし素数が平方数になることはない。場合 1 は実際に起こる：$b = 23$ とすると $\frac{1}{2}(23^3+1) = 6084 = 78^2$ となるので、$a = 6083, b = 23, c = 78$ は解である。）

最後の小問

場合 2 は素数に対しては成り立たないが、b が素数であるという条件を外せば、その式からやはり解が得られる。$\frac{1}{2}b(b+1)$ が平方数 c^2 になるときは常に、$a = \frac{1}{2}b(b-1)$ とおく。すると

$$a^2 + b^3 = (c^2 - b)^2 + b^3 = c^4 - 2bc^2 + b^2 + b^3 = c^4 - b^2(b+1) + b^2 + b^3 = c^4,$$

となる。ここで $2c^2 = b(b+1)$ を用いた。$\frac{1}{2}b(b+1)$ がいつ平方数になるかは、小問 (ii) によって正確にわかる：$b = m$ で $n^2 = \frac{1}{2}m(m+1)$ となるときである。解 $m = 1$ からは $a = 0$ が得られ、これは許されないが、$m = 8, n = 6$ はうまくいく。$b = 8, c = 6, a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$ とすると

$$28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296 = 6^4.$$

よって $a = 28, b = 8, c = 6$ は、$b = 2^3$ が素数でない解である。

検算

- 連鎖の次の解 $(99, 70)$ は $9801 - 2 \cdot 4900 = 1$ を満たし、$m = 49, n = 35$ を与える。実際 $\frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 50 = 1225 = 35^2$ である。
- $6^4 = 1296$ であり、$28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296$ である。
- $c < 400$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、b が素数である解は $a = 6083, b = 23, c = 78$ のみであった。これは場合 1 の解である：$78^4 - 6083^2 = (78^2 - 6083)(78^2 + 6083) = 1 \times 12167 = 23^3$。

よくある間違い

- $c^2 - a$ が小さいほうの因数でなければならないことを忘れ、a が負になる余分な「場合」を考えてしまう。
- 分解 $1 \times b^3$ を見落として $b \times b^2$ の場合だけを求めてしまう、あるいはその逆。
- 最後の小問で、$(3, 2)$ から得られる $m = 1$ を使ってしまい、$a = 0$ となる。問題では a は正でなければならない。

STEP のその先へ

方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ はペル方程式である。その解はちょうど累乗 $(3+2\sqrt{2})^k = x + y\sqrt{2}$ で与えられ、小問 (i) の写像は $3+2\sqrt{2}$ を掛けることにほかならない。これは、$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ のような環における単数（unit）の理論や、連分数（continued fraction）の理論の出発点である。$a^2 + b^3 = c^4$ のような方程式は、一般化されたフェルマー方程式（generalised Fermat equation）の研究に属する。これらすべてへの美しい入門書として、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。