解答例

STEP II 2013、第 6 問

純粋数学 • 数列の収束

> **STEP II 2013、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.2 節「極限としての黄金比」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/golden-limit.html

鍵となる考え方

項 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ は最終的な極限（limit）の上下に交互に跳ねるので、数列全体は単調（monotonic）ではなく、定理を直接適用することはできない。しかし、1 つおきに項を取り出すと、2 つの単調な数列が得られる。小問 (i) はこのことを示す道具である。すなわち、分母が正であるから、ステップ $u_{n+2} - u_n$ は 1 つ前のステップ $u_n - u_{n-2}$ と同じ符号をもつ、ということを述べている。

解答

まず、すべての u_n は正であることに注意する。実際、$u_1 = 1 > 0$ であり、$u_n > 0$ ならば $u_{n+1} = 1 + 1/u_n > 1 > 0$ である。したがって 0 で割ることは決してなく、$1 + u_n$ のような因子はすべて正である。

小問 (i)

$(*)$ を 2 回用いると、

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{u_{n+1}u_{n-1}}, \qquad u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-2}} = \frac{u_{n-2} - u_n}{u_n u_{n-2}}.$$

（2 つ目の式には u_{n-2} が存在することが必要であり、これが $n \geq 3$ とする理由である。）2 つ目の式を 1 つ目に代入すると、2 つのマイナス符号が打ち消し合う：

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(u_n u_{n+1})(u_{n-2} u_{n-1})}.$$

最後に、$(*)$ に u_n を掛けると $u_n u_{n+1} = u_n + 1$ が得られ、同様に $u_{n-2} u_{n-1} = u_{n-2} + 1$ である。よって

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(1 + u_n)(1 + u_{n-2})}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

数学的帰納法（induction）を用いる。$u_1 = 1$ であるから、主張 $1 \leq u_1 \leq 2$ は正しい。$1 \leq u_n \leq 2$ と仮定する。正の数の逆数（reciprocal）をとると不等号の向きが逆になるので、$\frac{1}{2} \leq 1/u_n \leq 1$ であり、したがって

$$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \leq 2$$

となる。これから確かに $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ が従う。数学的帰納法により、すべての n について $1 \leq u_n \leq 2$ である。

小問 (iii)

奇数番目の項。 $u_1 = 1$、$u_3 = \frac{3}{2}$ であるから $u_3 - u_1 > 0$ である。奇数 $n \geq 3$ に対して、小問 (i) によれば $u_{n+2} - u_n$ は $u_n - u_{n-2}$ に正の数 $1/\big((1 + u_n)(1 + u_{n-2})\big)$ を掛けたものであるから、両者は同じ符号をもつ。数学的帰納法により、すべてのステップ $u_{n+2} - u_n$（n は奇数）は正である。すなわち、数列 $u_1, u_3, u_5, \ldots$ は増加（increasing）する。(ii) よりこの数列は 2 で上に有界（bounded above）であるから、定理によりある極限 L に収束する。すべての項が $[1, 2]$ に含まれるので、$1 \leq L \leq 2$ である。

偶数番目の項。 こちらは $u_2 = 2$、$u_4 = \frac{5}{3}$ であるから $u_4 - u_2 < 0$ であり、同じ議論により $u_2, u_4, u_6, \ldots$ は減少（decreasing）することがわかる。この数列は 1 で下に有界である。

> **考えてみよう** 定理は上に有界な増加数列についてのものである。減少数列に対してこれをどう使えばよいだろうか？

符号を反転させたものに適用すればよい。$-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$ は増加し、-1 で上に有界であるから極限に収束し、したがって $u_2, u_4, \ldots$ も収束する。その極限を M とおく。ここでも $1 \leq M \leq 2$ である。

極限を求める。 $(*)$ を 2 ステップ用いると、同じ偶奇の項どうしを結ぶ漸化式（recurrence）が得られる：

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

考えてみよう なぜ u_{n+2} と u_n を単純に L で置き換えてよいのだろうか？

奇数の n に沿って、u_n と u_{n+2} はともに L に収束する。右辺は u_n の連続関数（continuous function）である（分母は 2 以上である）から、$(2L+1)/(L+1)$ に収束する。極限は一意であるから、

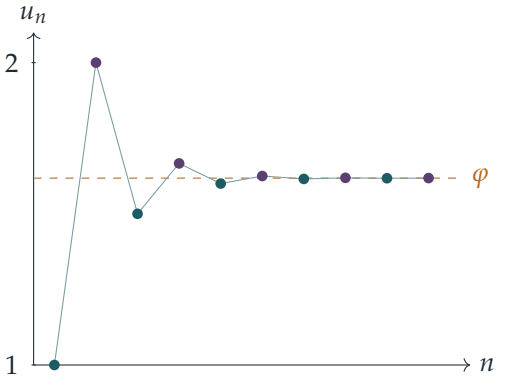
$$L = \frac{2L+1}{L+1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0,$$

よって $L = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ である。$L \geq 1$ であるから、$L = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ でなければならない。M についてもまったく同じ方程式が成り立ち、$M \geq 1$ であるから、

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} u_{2k} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

2 つの極限が異なる可能性もあった（その場合、数列全体は振動することになる）が、この方程式には 1 以上の解が 1 つしかない。

数列全体。 $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ とおき、$\varepsilon > 0$ とする。すべての奇数 $n > K_1$ に対して $|u_n - \varphi| < \varepsilon$ となるような K_1 が存在し、すべての偶数 $n > K_2$ に対して同じことが成り立つような K_2 が存在する。すると、すべての $n > \max(K_1, K_2)$ に対して $|u_n - \varphi| < \varepsilon$ となるので、$u_n \to \varphi$ である。



奇数番目の項（ティール）は φ に向かって上昇し、偶数番目の項（プラム）は φ に向かって下降する。

$u_1 = 3$ から始める場合

結論は変わらない。今度は $u_1 = 3$、$u_2 = \frac{4}{3}$、$u_3 = \frac{7}{4}$、$u_4 = \frac{11}{7}$ である。議論はわずかな修正だけで済む。

- 小問 (i) では $(*)$ と各項が正であることしか使っておらず、これは依然として成り立つので、恒等式はやはり正しい。
- 小問 (ii) は $n = 1$ で成り立たないが、$1 \leq u_2 = \frac{4}{3} \leq 2$ であり、帰納法のステップは変わらないので、すべての $n \geq 2$ について $1 \leq u_n \leq 2$ である。また $u_1 = 3 \geq 1$ であるから、すべての項は 1 以上である。
- 今回は $u_3 - u_1 = -\frac{5}{4} < 0$、$u_4 - u_2 = \frac{5}{21} > 0$ である。したがって奇数番目の項は減少して 1 で下に有界であり、偶数番目の項は増加して 2 で上に有界である。役割は入れ替わるが、どちらも収束する。
- 漸化式 $u_{n+2} = (2u_n + 1)/(u_n + 1)$ は依然として成り立ち、2 つの極限はともに 1 以上であるから、どちらもやはり φ である。

よって、この数列もやはり $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ に収束する。

検算

$u_1 = 1$ のとき、項は $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$ であり、これは連続するフィボナッチ数（Fibonacci numbers）の比である。また $u_{10} = \frac{89}{55} \approx 1.61818$ であり、すでに $\varphi \approx 1.61803$ に非常に近い。$u_1 = 3$ のとき、項は $3, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \ldots$（リュカ数（Lucas numbers）の比）であり、これらもやはり 1.61803 に近づく。(i) の恒等式を $n = 3$ で確かめることもできる：$u_5 - u_3 = \frac{1}{10}$ であり、$\dfrac{u_3 - u_1}{(1 + u_3)(1 + u_1)} = \dfrac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$ である。

よくある間違い

- 数列全体が収束すると仮定して、いきなり $L = 1 + 1/L$ を解いてしまう。これで正しい値は得られるが、それが許されるのは収束が証明された後であり、その証明こそがこの問題の要点である。
- 解 $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ のことを忘れる。これは除外しなければならず、ここでは $L \geq 1$ によって除外される。
- 減少する偶数番目の部分列に、どのようにするのか（例えば $-u_{2k}$ を経由するなど）を述べずに定理を適用してしまう。

STEP のその先へ

これは大学 1 年次の解析学（analysis）における標準的な議論の雛形である。すなわち、単調収束定理（monotone convergence theorem）、部分列（subsequence）、そして奇数番目と偶数番目の部分列が同じ極限に収束するならば数列全体もその極限に収束するという事実である。実は u_n は連分数（continued fraction）$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$ の第 n 近似分数（convergent）であり、写像 $x \mapsto 1+1/x$ は φ の近くで縮小写像（contraction）となっている。これが、どんな正の初期値から始めても φ に至る理由である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は単調数列と部分列を丁寧に扱っており、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）は連分数を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。