解答例

# STEP II 2013、第 5 問

純粋数学 • 対称性と曲線の概形

> **STEP II 2013、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q5

## 鍵となる考え方

関数が $x \mapsto 1-x$ や $x \mapsto 1/x$ のような置き換え（substitution）によって変わらないならば、その恒等式を合成関数の微分法（chain rule）で微分すると、$x$ における傾きと、像の点における傾きとが結びつく。置き換えによって動かない点（不動点）では、傾きはそれ自身の符号を反転したものに等しくなければならないので、0 である。小問 (iii) の方程式については、この対称性から、すべてを $u = x^2 - x$ で表すことが示唆される。$u$ 自身も $x \mapsto 1-x$ で変わらないからである。こうすると、$x$ の 6 次式よりもはるかに扱いやすい $u$ の 3 次式が得られる。

## 解答

### 小問 (i)

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1-x)$ を $x$ で微分し、右辺には合成関数の微分法を用いると、

$$\mathrm{f}'(x) = -\mathrm{f}'(1-x) \qquad \text{任意の} x.$$

$x = \frac{1}{2}$ を代入すると $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = -\mathrm{f}'(\frac{1}{2})$ となるので、$\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$ である。

次に、$x \neq 0$ に対して $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1/x)$ も成り立つとする。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$ であるから、微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{f}'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

$x = -1$（これは自分自身の逆数である）では $\mathrm{f}'(-1) = -\mathrm{f}'(-1)$ となるので、$\mathrm{f}'(-1) = 0$ である。

$x = 2$ では、最初の結果より $\mathrm{f}'(2) = -\frac{1}{4}\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$ となる。（同様に、最初の恒等式に

$x=2$ を代入しても $f'(2)=-f'(-1)=0$ が得られる。）

**小問 (ii)**

$x$ を $1/x$ に置き換える。分子は

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)^3=\frac{(1-x+x^2)^3}{x^6},$$

となり、分母は

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{x^4}.$$

となる。割り算をして $x^2(1-x)^2=(x^2-x)^2$ を用いると、

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^6}\cdot\frac{x^4}{(1-x)^2}=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=f(x).$$

$x$ を $1-x$ に置き換える。$(1-x)^2-(1-x)=(1-x)(-x)=x^2-x$ であるから $x^2-x$ は変わらず、したがって $x^2-x+1$ も変わらない。ゆえに $f(1-x)=f(x)$ である。

**グラフの概形**。小問 (i) より、$x=-1,\frac{1}{2},2$ は停留点（stationary point）である。停留点はちょうど3つであるから、これらがすべてである。その値は

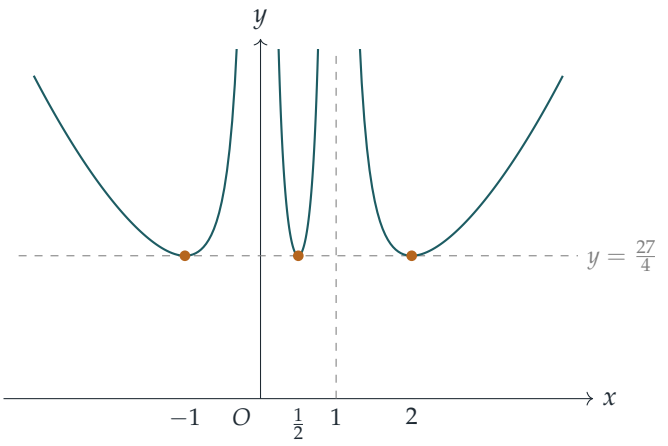
$$f(-1)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4},\qquad f(\tfrac{1}{2})=\frac{(3/4)^3}{(1/4)^2}=\frac{27}{4},\qquad f(2)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4}.$$

3つとも等しいが、これは当然である。$f(2)=f(\frac{1}{2})$ かつ $f(2)=f(1-2)=f(-1)$ だからである。

その他の特徴：

- $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ であるから、いたるところで $f(x)>0$ であり、曲線は $x$ 軸と交わらない。
- $x\to 0$ または $x\to 1$ のとき、分子は1に、分母は $0^+$ に近づくので、両側から $f(x)\to+\infty$ となる。すなわち $x=0$ と $x=1$ は垂直漸近線（vertical asymptote）である。
- $|x|$ が大きいとき $f(x)\approx x^6/x^4=x^2$ であるから、$x\to\pm\infty$ のとき $f(x)\to+\infty$ となり、おおよそ放物線のように振る舞う。

したがって、3つの区間 $(-\infty,0),(0,1),(1,\infty)$ のそれぞれにおいて、関数は連続で、両端で $+\infty$ に発散する。よって各区間には最小値をとる点があり、それは停留点である。各区間には $-1,\frac{1}{2},2$ のうちちょうど1つが含まれるので、その点が最小点であり、他に極値点はない。各分枝はU字形で、最小値は $\frac{27}{4}$ である。




**小問 (iii)**

**方程式** $\mathrm{f}(x) = \frac{27}{4}$。グラフの概形から、$\frac{27}{4}$ はどの分枝においても最小値であり、それをとるのは 3 つの停留点だけである。よって解は

$$x = -1, \qquad x = \tfrac{1}{2}, \qquad x = 2,$$

であり、定義域内のそれ以外のすべての $x$、すなわち

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < 2, \quad x > 2.$$

に対して $\mathrm{f}(x) > \frac{27}{4}$ である。これは代数的にも確かめられる。$u = x^2 - x$ とおく（定義域内では $u \neq 0$）。すると $\mathrm{f}(x) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$ であり、

$$\mathrm{f}(x) - \frac{27}{4} = \frac{4u^3 - 15u^2 + 12u + 4}{4u^2} = \frac{(u-2)^2(4u+1)}{4u^2}.$$

$4u + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$ であるから、これは決して負にならず、0 となるのは $u = 2$（すなわち $x^2 - x - 2 = 0$ で、$x = 2$ または $-1$）のときか、$x = \frac{1}{2}$ のときに限る。

**考えてみよう** 6 次方程式を解かずに、$\mathrm{f}(x) = \frac{343}{36}$ の解を 1 つ見当をつけるにはどうすればよいか。

**方程式** $\mathrm{f}(x) = \frac{343}{36}$。$\frac{343}{36} = \frac{7^3}{6^2}$ に注目し、$x^2 - x + 1 = 7$ かつ $x^2 - x = 6$ となる $x$ を探す。$x = 3$ はどちらも満たすので、$\mathrm{f}(3) = \frac{343}{36}$ である。すると対称性によって、さらに多くの解が労せずして得られる。3 に $x \mapsto 1 - x$ と $x \mapsto 1/x$ を繰り返し施すと

$$3, \quad 1 - 3 = -2, \quad \tfrac{1}{3}, \quad 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{3}{2}, \quad 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

が得られる。これらは相異なる6つの数であり、分母を払うと $f(x) = \frac{343}{36}$ は6次の多項式方程式になるので、解はこれですべてである：

$$x = -2,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{2},\ 3.$$

（$u$ で表すと、方程式は $36u^3 - 235u^2 + 108u + 36 = 0$ となり、$(u-6)(9u+2)(4u-3) = 0$ と因数分解できる。これから組 $\{3,-2\}, \{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}, \{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\}$ が得られる。）

$\frac{343}{36} > \frac{27}{4}$ であるから、水平な直線 $y = \frac{343}{36}$ は各U字形の分枝と、最小点の両側で1回ずつ、計2回交わり、2つの交点の外側では分枝はこの直線より上にある。$(-\infty, 0)$ 上の分枝とは $-2$ と $-\frac{1}{2}$ で、$(0,1)$ 上の分枝とは $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ で、$(1,\infty)$ 上の分枝とは $\frac{3}{2}$ と3で交わる。したがって、$f(x) > \frac{343}{36}$ となるのは

$$x < -2, \quad -\tfrac{1}{2} < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3} < x < 1, \quad 1 < x < \tfrac{3}{2}, \quad x > 3.$$

のときであり、かつそのときに限る。

## 検算

- 値を代入してみる：$f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{(7/4)^3}{(3/4)^2} = \dfrac{343/64}{9/16} = \dfrac{343}{36}$ となり、主張どおりである。
- 主張した区間内の点で確かめる：$f(4) = \frac{13^3}{12^2} \approx 15.3 > \frac{343}{36} \approx 9.53$ である一方、$f(2) = 6.75$ は下にあり、$(\frac{3}{2},3)$ が除かれることと整合する。
- 6つの解は、和が1となる組と、互いに逆数となる組に分かれており、2つの対称性が要請するとおりである。また、コンピュータで $10^5$ 個の無作為な点において不等式を確認した。

## よくある間違い

- $f(1/x)$ を微分する際に、合成関数の微分法から生じる因子 $-1/x^2$ を忘れること。$x = -1$ では影響しないが、2における傾きが0になる理由を理解するには欠かせない。
- 範囲を $x < -2$ や $x > 3$ のような単一の区間として書き、$x = 0$ と $x = 1$ の漸近線が解の集合を分割することを忘れること。$x = 0$ と $x = 1$ は除かなければならない。
- 停留点を極大点として扱うこと。どの分枝も両端で $+\infty$ に発散するので、これらは極小点である。

## STEP のその先へ

$x \mapsto 1-x$ と $x \mapsto 1/x$ によって生成される 6 つの写像は群（group）をなし（三角形の対称性のなす群と同型（isomorphic）である）、f は定数倍を除いて、複比（cross-ratio）の古典的な $j$ 不変量（j-invariant）、すなわち 6 つの写像すべてで変わらない関数である。置き換えのなす群のもとで不変な関数は、ガロア（Galois）理論や楕円曲線（elliptic curve）の理論の中心的な主題である。このような変換群に出会うには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。