解答例

STEP II 2013、第 4 問

純粋数学 • 弦の中点の軌跡

> **STEP II 2013、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q4

鍵となる考え方

弦（chord）の中点（midpoint）は、弦の端点を求めなくても求められる。P と Q の x 座標は二次方程式の解であり、その平均は最初の 2 つの係数の比の半分に負号をつけたものである。その後は、それぞれの軌跡（locus）はパラメータ（parameter）を消去するだけの問題になる。どの答えも幾何学で説明がつく。円の中心から弦の中点へ引いた直線は、その弦に垂直である。

解答

M の座標

直線は $y = b(x - a)$ である。これを $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると

$$(1 + b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 - 1 = 0.$$

を得る。この方程式の解は P, Q の x 座標 x_P, x_Q であるから、解と係数の関係（sum of the roots）より

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_P + x_Q) = \frac{ab^2}{1 + b^2}.$$

である。M は直線上にあるから $y_M = b(x_M - a) = b \cdot \dfrac{ab^2 - a - ab^2}{1 + b^2}$ となり、

$$M = \left(\frac{ab^2}{1 + b^2}, -\frac{ab}{1 + b^2} \right).$$

である。P と Q が存在して相異なるためには、判別式（discriminant）が正でなければならない：

$$4a^2b^4 - 4(1+b^2)(a^2b^2-1) = 4(1+b^2-a^2b^2) > 0 \iff a^2b^2 < 1+b^2.$$

（これは、O から直線までの距離 $|ab|/\sqrt{1+b^2}$ が 1 より小さいということである。）この条件はどの小問でも必要になる。

小問 (i)

$b > 0$ を固定すると、

$$-by_M = -b \cdot \left(-\frac{ab}{1+b^2}\right) = \frac{ab^2}{1+b^2} = x_M,$$

となるので、軌跡上のすべての点で $x = -by$ が成り立ち、これが示すべきことであった。これは O を通り傾き $-1/b$ の直線であり、鍵となる考え方から予想されるとおり、弦に垂直である。

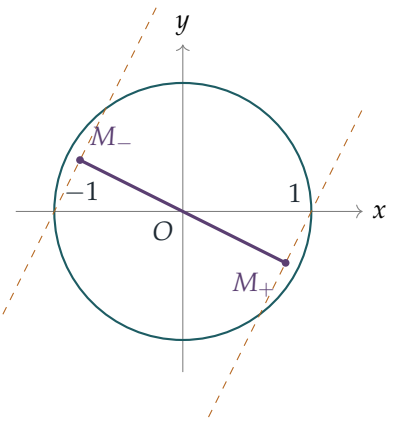
$-1 \le a \le 1$ ならば $a^2b^2 \le b^2 < 1+b^2$ であるから、直線はつねに円と 2 点で交わり、そのようなすべての a に対して M が定まる。M の座標はどちらも a の定数倍であるから、a が $[-1,1]$ を動くとき、点 M は直線 $x = -by$ 上を、$a = -1$ に対応する点から $a = 1$ に対応する点まで一様に動く。したがって軌跡は次の 2 点を結ぶ線分である：

$$M_\pm = \pm\left(\frac{b^2}{1+b^2}, -\frac{b}{1+b^2}\right),$$

その長さは

$$2\,\frac{\sqrt{b^4+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b}{(1+b^2)^{1/2}},$$

である。ここで b^2 の平方根をとる際に $b > 0$ を用いた。これが求める長さである。この線分の中点は O であり、端点 M_+ は $(1,0)$ を通る弦の中点、M_- は $(-1,0)$ を通る弦の中点である。図は $b = 2$ の場合で、このとき端点は $\pm(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$ である。



破線は両端の弦であり、$(\pm 1, 0)$ を通り傾きは 2 である。

小問 (ii)(a)

今度は $0 < a < 1$ として a を固定する。すると $a^2b^2 < b^2 < 1 + b^2$ であるから、$A = (a, 0)$ を通るどの直線も円と 2 点で交わる。M の式から

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^4 + a^2b^2}{(1+b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{1+b^2} = a \cdot \frac{ab^2}{1+b^2} = ax.$$

である。よって M は

$$x^2 + y^2 - ax = 0, \quad \text{すなわち} \quad (x - \tfrac{a}{2})^2 + y^2 = (\tfrac{a}{2})^2,$$

で表される、中心 $(\frac{a}{2}, 0)$、半径 $\frac{a}{2}$ の円、つまり OA を直径とする円の上にある。

考えてみよう この円全体が描かれるだろうか？

完全にではない。$x = ab^2/(1+b^2) = a - a/(1+b^2)$ であるから、つねに $0 \leq x < a$ となり、点 $A = (a, 0)$ そのものには決して到達しない。そこに到達するには A を通る鉛直な直線が必要だが、その直線には傾きがない。それ以外の点にはすべて到達する。実際、$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ として $b = \tan\theta$ とおくと

$$M = (a\sin^2\theta,\ -a\sin\theta\cos\theta) = (\tfrac{a}{2} - \tfrac{a}{2}\cos 2\theta,\ -\tfrac{a}{2}\sin 2\theta),$$

となり、2θ が $(-\pi, \pi)$ を動くとき、これは $2\theta = \pm\pi$ に対応する点、すなわち A を除いて円をちょうど 1 周する。よって軌跡は、OA を直径とする円から 1 点 A を除いたものである。幾何学的には、OM は弦 AM に垂直なので $\angle OMA$ は直角であり、M は OA を直径とする円の上にある（$b = 0$ のときは $M = O$ である）。この円は単位円（unit circle）の内部にある。

小問 (ii)(b)

今度は $0 < b \leq 1$ として $a = 1/b$ とする。条件 $a^2b^2 < 1 + b^2$ は $1 < 1 + b^2$ となり、これは成り立つ。直線は $y = b(x - 1/b) = bx - 1$ であるから、つねに単位円上の点 $B = (0, -1)$ を通る。したがって B はつねに P, Q のいずれかである。公式より

$$M = \left(\frac{b}{1+b^2},\ -\frac{1}{1+b^2}\right), \qquad x^2 + y^2 = \frac{b^2+1}{(1+b^2)^2} = \frac{1}{1+b^2} = -y.$$

である。よって M は

$$x^2 + y^2 + y = 0, \quad \text{すなわち} \quad x^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2,$$

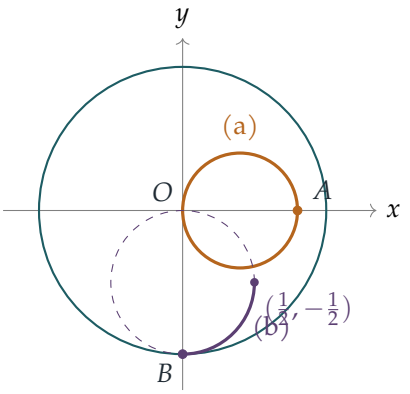
で表される、中心 $(0, -\frac{1}{2})$、半径 $\frac{1}{2}$ の円、つまり OB を直径とする円の上にある（理由は (a) と同じく直角による）。

今回は円の一部しか描かれない。$b = \tan\theta, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とおくと

$$M = (\tfrac{1}{2}\sin 2\theta,\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta),$$

であり、2θ は $(0, \frac{\pi}{2}]$ を動く。よって軌跡は円の 4 分の 1、すなわち $B = (0, -1)$（含まない。$b = 0$ が必要になるため）から反時計回りに $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$（含む。$b = 1, a = 1$ から得られる）までの弧である。この弧の上では $0 < x \leq \frac{1}{2}$ かつ $-1 < y \leq -\frac{1}{2}$ である。

図は、(a) で $a = 0.8$ とした場合の両方の軌跡を単位円とともに示したものである。白丸は (a) で除かれる点 A と、(b) で除かれる端点 B を表す。



(b) では実線の弧が軌跡であり、小さい円の残りの破線部分には到達しない。

検算

- $a = 0$ のとき直線は O を通るので弦は直径であり、M は O になるはずである。実際、公式は $(0, 0)$ を与える。
- (i) で $b = 1$ のとき、$(1, 0)$ を通り傾き 1 の弦は $(1, 0)$ と $(0, -1)$ を結び、その中点は $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ で、M_+ と一致する。このとき線分の長さは、公式どおり $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$ である。
- 同じ弦は (ii)(b) の弧の $b = 1$ 側の端に対応し、$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ は $x^2 + y^2 + y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$ を満たす。
- (ii)(a) で $b = 1$ とすると $M = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ となり、これは OA を直径とする円の最下点である。45° の傾きをもつ弦であれば当然そうなるはずである。

よくある間違い

- 二次方程式の解の公式を使って P と Q を具体的に求めてしまう。それでも解けるが、解の和を使えば M は 1 行で求まる。
- (ii)(a) や (ii)(b) で円全体が軌跡だと主張してしまう。パラメータが実際にとる値と、それらが与える点をつねに確認すること。
- 直線が実際に円と交わることの確認を忘れる。(i) でも (ii) の両方の場合でもつねに交わるが、そのことは述べておく必要がある。

STEP のその先へ

平行な弦の中点が中心を通る直線上にあるという事実は、任意の二次曲線（conic）について成り立つ。楕円の場合、その直線は**共役直径**（conjugate diameter）と呼ばれ、極と極線（poles and polars）という射影幾何の考え方を垣間見る最初の機会となる。小問 (ii) の円は、「半円に対する円周角は直角である」という古典的な定理を逆向きにたどったものである。軌跡と媒介変数表示（parametrisation）を問題解決の道具としてさらに学ぶには、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* がよい次の一歩となる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。