解答例

STEP II 2013、第 3 問

純粋数学 • 3 次式の根

> **STEP II 2013、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q3

鍵となる考え方

すべては、最高次の係数（leading coefficient）が正で、相異なる 3 つの実数解をもつ三次関数（cubic）のグラフの形から導かれる。そのグラフは $-\infty$ から上昇し、軸を下から上へ横切り、再び下がり、そしてもう一度下から上へ軸を横切る。値 $f(0) = c$ によって 0 が解に対してどこに位置するかがわかり、極値点（turning points）（二次方程式 $f'(x) = 0$ の解）はその和と積によって特定できる。最後の小問は、極値点についての条件だけでは、曲線が実際に軸と 3 回交わることを保証できないことを思い出させてくれる。

解答

以下、全体を通して

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c, \qquad f'(x) = 3(x^2 + 2ax + b).$$

とおく。$f(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ をもつとき、$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と書けるので、3 つの因数の符号を読み取ると

$$f(x) < 0 \text{ となるのは} (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \gamma), \qquad f(x) > 0 \text{ となるのは} (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty).$$

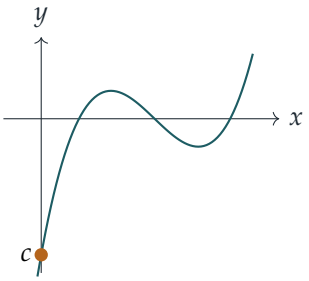
である。また、ロルの定理（Rolle's theorem）により、f' は (α, β) に零点をもち、(β, γ) にももう 1 つ零点をもつ。f' は二次式なので、これ以外の零点はない。よって極値点は $p < q$ で、

$$\alpha < p < \beta < q < \gamma.$$

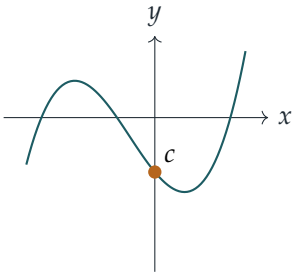
を満たす。

小問 (i)

曲線 $y = f(x)$ は y 軸と $(0, c)$ で交わり、$c < 0$ なのでこの点は x 軸より下にある。上の符号の様子から、$f(0) < 0$ であることは、$0 < \alpha$ または $\beta < 0 < \gamma$ のいずれかであることを意味する。これらが下の2つの図である。



3つの解がすべて正



ちょうど1つの解が正

$0 < \alpha$ ならば、3つの解はすべて正である。$\beta < 0 < \gamma$ ならば $\alpha < \beta < 0$ なので、ちょうど1つの解（γ）が正である。$f(0) = c \neq 0$ なので、0となる解はない。したがって、ちょうど1つの解が正であるか、3つすべてが正であるかのいずれかであり、題意は示された。

小問 (ii)

ここでは $0 < \alpha < \beta < \gamma$ である。

c の符号。 $0 < \alpha$ なので、点0は $f < 0$ となる区間 $(-\infty, \alpha)$ に含まれる。よって $c = f(0) < 0$ である。

極値点。 方程式 $x^2 + 2ax + b = 0$ は相異なる2つの実数解 p と q をもつので、その判別式（discriminant）は正である：

$$4a^2 - 4b > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 > b.$$

$p > \alpha > 0$ かつ $q > p$ なので、2つの極値点はどちらも正である。二次式 $x^2 + 2ax + b$ について、解の和と積は

$$p + q = -2a, \qquad pq = b.$$

である。$p, q > 0$ なので $-2a > 0$、すなわち $a < 0$ であり、$b = pq > 0$ である。これらをまとめると

$$a^2 > b > 0, \qquad a < 0, \qquad c < 0,$$

となり、これが $(*)$ である。

($a<0$、$b>0$、$c<0$ は解から直接得ることもできる。$\alpha+\beta+\gamma=-3a$、$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3b$、$\alpha\beta\gamma=-c$ はいずれも正だからである。しかし $a^2>b$ を示すには、やはり極値点が必要である。)

小問 (iii)

ここでは $c=f(0)>0$ なので、0 は $f>0$ となる 2 つの区間 (α,β) または (γ,∞) のいずれかに含まれる。これにより 2 通りの図の候補が得られる。$\alpha<0<\beta<\gamma$(負の解が 1 つ、正の解が 2 つ)か、$\alpha<\beta<\gamma<0$(3 つすべて負)のいずれかである。

考えてみよう 条件 $ab<0$ によって、これらのうち一方をどのように排除できるだろうか?

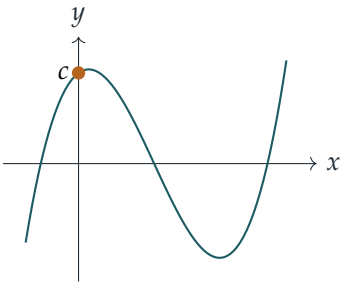
再び極値点に注目する。仮に 3 つの解がすべて負であるとすると、$p<q<\gamma<0$ となるので、2 つの極値点はどちらも負になる。すると

$$-2a=p+q<0 \quad \text{かつ} \quad b=pq>0,$$

となるので $a>0$ かつ $b>0$ であり、$ab>0$ となる。これは $ab<0$ に矛盾する。したがって 2 つ目の図はありえず、

$$\alpha<0<\beta<\gamma:$$

1 つの解が負で、残りの 2 つは正である。



この場合は実際に起こりうる。たとえば、解 -1、2、5 からは $x^3-6x^2+3x+10$ が得られ、$a=-2$、$b=1$、$c=10$ となり、$ab=-2<0$ かつ $c>0$ である。これが上に描いた曲線である。

小問 (iv)

考えてみよう 三次関数が 3 つの実数解をもつためには、$(*)$ に加えてどのような条件が必要だろうか？

条件 $(*)$ が制御しているのは、極値点と $f(0)$ の符号だけである。3 つの実数解をもつためには、さらに極大値（local maximum）が軸より上になければならない。そこで、a と b を 2 つの正の極値点が得られるように選び、そのうえで c を十分に負にして極大値を軸より下に引き下げればよい。

$a=-1$、$b=\frac{3}{4}$ とすると

$$f'(x)=3(x^2-2x+\tfrac{3}{4})=3(x-\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{3}{2}).$$

となる。極大となるのは $x=\frac{1}{2}$ においてであり、そこでは

$$f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{8}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{9}{8}+c=\tfrac{1}{2}+c.$$

である。$c=-1$ と選ぶ。すると方程式は

$$x^3-3x^2+\tfrac{9}{4}x-1=0 \qquad (a=-1,\ b=\tfrac{3}{4},\ c=-1),$$

となり、$a^2=1>\frac{3}{4}=b>0$、$a<0$、$c<0$ なので $(*)$ が成り立つ。

次に解の個数を数える。f は $(-\infty,\frac{1}{2}]$ で増加するので、そこでは $f(x)\le f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}<0$ である。$[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ では f は減少するので、$-\frac{1}{2}$ より下にとどまる。$[\frac{3}{2},\infty)$ では f は $f(\frac{3}{2})=-1$ から $+\infty$ まで増加するので、軸をちょうど 1 回横切る。したがって実数解はちょうど 1 つである（$f(2)=-\frac{1}{2}$、$f(3)=\frac{23}{4}$ なので、その解は 2 と 3 の間にある）。

検算

- 三次式 $(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$ は $a=-2$、$b=\frac{11}{3}$、$c=-6$ であり、小問 (ii) の予測どおり、確かに $a^2=4>\frac{11}{3}>0$ である。
- 曲線を $x\mapsto -x$ で折り返すと、解 α,β,γ は $-\alpha,-\beta,-\gamma$ に移り、a と c の符号は変わるが b の符号は変わらない。よって ab と c はどちらも符号を変え、小問 (i) の鏡像から、$c>0$ のときは、ちょうど 1 つの解が負であるか、3 つすべてが負であるかのいずれかとなる。これはまさに、小問 (iii) で出発点とした 2 つの図である。
- 小問 (iv) における唯一の実数解は $x\approx 2.178$ である。相異なる 3 つの実数解をもつ数千個のランダムな三次式をコンピュータで調べた結果も、小問 (i)〜(iii) と一致した。

よくある間違い

- 解の符号だけから $a^2 > b$ を証明しようとすること。この不等式は、極値点が実数で相異なることから得られる。
- $(*)$ が 3 つの正の解をもつことと**同値**（equivalent）であると思い込むこと。小問 (iv) は、それが必要条件（necessary condition）にすぎず、十分条件（sufficient condition）ではないことを示している。
- 小問 (iv) で、極小値（local minimum）は負になるが極大値はまだ正であるように c を選んでしまうこと。そうすると解は 1 つではなく 3 つになる。

STEP のその先へ

ここでの符号に関する議論は、一般的な理論の入り口である。デカルトの符号法則（Descartes' rule of signs）は、正の解の個数を係数の符号の変化の回数で上から抑え、スツルムの定理（Sturm's theorem）は区間内の実数解の個数を正確に数える。三次式の場合、小問 (iv) で欠けていた条件は判別式の符号であり、判別式は（正の因数を除いて）極値点における値の積 $-f(p)f(q)$ に等しい。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、大学 1 年次の水準で多項式とその解を論じている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。