解答例

STEP II 2013、第 2 問

純粋数学 • 漸化式による積分

> **STEP II 2013、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q2

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）$x^n(1-x)^n$ は鏡映 $x \mapsto 1-x$ に関して対称（symmetric）であり、この対称性のおかげで x と $1-x$ の役割を労せずに入れ替えることができる。そのうえで部分積分（integration by parts）によって x の累乗を $1-x$ の累乗と交換し、恒等式 $x+(1-x)=1$ を用いて積をすでに知っている積分へと分解し直す。これらを組み合わせると漸化式（reduction formula）が得られ、それをたどっていくと整数の n に対しては階乗（factorial）が現れ、さらに半整数（half-integer）に対しても同じ式が使える。

解答

小問 (i)

$n \geq 1$ に対して $J_n = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^n \,\mathrm{d}x$ とおく。$u = 1-x$ と置換（substitution）すると $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端 $0, 1$ は $1, 0$ になる：

$$J_n = \int_1^0 (1-u)^{n-1}u^n\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^n(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

これが求める等式である（積分変数（dummy variable）の名前は何でもよい）。

J_n の二つの等しい表示を足し合わせると、

$$\begin{aligned} 2J_n &= \int_0^1 \left[x^{n-1}(1-x)^n + x^n(1-x)^{n-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}[(1-x)+x]\mathrm{d}x = I_{n-1}. \end{aligned}$$

次に、$u = x^n$、$\mathrm{d}v = (1-x)^n\,\mathrm{d}x$ として I_n を部分積分する。このとき $v = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ である：

$$I_n = \Big[-\frac{x^n(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

境界項（boundary term）は両端で 0 になる。$x=1$ では $(1-x)^{n+1}$ があるから、$x=0$ では $n \geq 1$ のもとで x^n があるからである。よって問題文の式

$$I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

が得られる。

考えてみよう この積分から I_n と I_{n-1} に戻るにはどうすればよいか？

$1-x$ の因数を一つ切り離し、それを文字どおり $1-x$ として書く：

$$x^{n-1}(1-x)^{n+1} = x^{n-1}(1-x)^n\,(1-x) = x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^n.$$

積分すると、上の結果を用いて右辺は $J_n - I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} - I_n$ となる。したがって

$$I_n = \frac{n}{n+1}\Big(\tfrac{1}{2}I_{n-1} - I_n\Big) \quad\Longrightarrow\quad I_n \cdot \frac{2n+1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}I_{n-1},$$

であり、両辺に $\dfrac{n+1}{2n+1}$ を掛けると、

$$I_n = \frac{n}{2(2n+1)}\,I_{n-1},$$

となって、求める式が得られる。この議論のどこにも n が整数であることは使われていない点に注意しよう。必要だったのは $n \geq 1$ だけである（境界項のため、そしてすべての被積分関数が $[0,1]$ 上で連続であるため）。このことを小問 (iii) で用いる。

小問 (ii)

$I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ を数学的帰納法（induction）で証明する。出発点は $n=0$ で、$I_0 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 = \dfrac{(0!)^2}{1!}$ である。$n \geq 1$ として、$n-1$ に対して式が成り立つと仮定する。すると小問 (i) より

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n}{2(2n+1)} \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \frac{n^2((n-1)!)^2}{2n(2n+1)(2n-1)!} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

ここで分子と分母に n を掛け、$2n(2n+1)(2n-1)! = (2n+1)!$ を用いた。これで帰納法が完結し、式はすべての正の整数 n（および $n=0$）に対して成り立つ。

小問 (iii)

$x = \sin^2\theta$ とおくと $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、θ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動く。この区間では $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は非負であるから、

$$(x(1-x))^{1/2} = (\sin^2\theta\cos^2\theta)^{1/2} = \sin\theta\cos\theta.$$

考えてみよう ここでなぜ $\sin\theta\cos\theta \geq 0$ が必要なのか？

$\sqrt{t^2} = |t|$ であって t ではないからである。$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上では絶対値をそのまま外してよい。よって

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{4}\Big[\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$I_{\frac{3}{2}}$ については、小問 (i) の漸化式を $n = \frac{3}{2}$ として用いる。$\frac{3}{2} \geq 1$ であり、導出のどこでも n が整数である必要はなかったので、これは許される：

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{3/2}{2\cdot 4} I_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{128}.$$

確認として、同じ置換を使うと直接

$$I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^4 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{128},$$

が得られる。ここで $\sin^4\phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi$ を用いた。

検算

- $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$ であり、公式からも $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ が得られる。同様に $I_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{4}{5!}$ である。
- $I_{\frac{1}{2}}$ は半径 $\frac{1}{2}$ の半円（semicircle）$y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}$ の下の面積であり、これは $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$ である。
- 数値的には $I_{\frac{3}{2}} \approx 0.073631$ であり、$3\pi/128$ と一致する。また漸化式は、$n = 2.7$ のような整数でない n についてもコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 部分積分の境界項が 0 になること、特に $x = 0$ での確認を忘れる。

- $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上での符号に触れずに $\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sin\theta\cos\theta$ と書いてしまう。
- 整数に対してしか証明されていない小問 (ii) の階乗の公式から $I_{\frac{3}{2}}$ を計算してしまう。漸化式を使うのが安全な道である。

STEP のその先へ

I_n はベータ関数（beta function）$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ の特別な場合であり、ここでは $I_n = B(n+1, n+1)$ である。そして小問 (ii) は $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ の整数の場合にあたる。この恒等式に $n = \frac{1}{2}$ を代入すると $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ が得られ、これこそが小問 (iii) に π が現れるより深い理由である。このような積分は、統計学におけるベータ分布（beta distribution）や π に関するウォリス（Wallis）の積の背後にある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、同じ趣旨の漸化式の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。