解答例

# STEP II 2013、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン分布のモーメント

> **STEP II 2013、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q12

## 鍵となる考え方

$X$ は $U$ の奇数の値だけを残し、$Y$ は偶数の値だけを残す。したがって、どの期待値（expectation）も、奇数番目の項だけ、あるいは偶数番目の項だけにわたるポアソン（Poisson）分布の和になる。$\mathrm{E}(U)$ や $\mathrm{E}(U(U-1))$ を求めるときの技法はここでも使える。すなわち、$k$ や $k(k-1)$ を $k!$ と約分し、$\lambda$ や $\lambda^2$ をくくり出すのである。$k$ が 1 減るごとに奇数と偶数が入れ替わり、これによって $\alpha$ と $\beta$ の役割が入れ替わる。また、$\alpha+\beta=\mathrm{e}^{\lambda}$ であるから、因子 $\mathrm{e}^{-\lambda}$ は $1/(\alpha+\beta)$ に等しいことにも注意する。

## 解答

以下では一貫して、$\lambda>0$ として $k=0,1,2,\ldots$ に対し $\mathrm{P}(U=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ である。2 つの級数（series）を項ごとに足すと

$$\alpha+\beta=\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{\lambda},\qquad \text{よって}\qquad \mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

（実は $\alpha=\cosh\lambda$、$\beta=\sinh\lambda$ である。）

### 小問 (i)

$U$ が奇数でなければ $X$ は 0 であるから、奇数の $k$ だけが寄与する：

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k\ \text{奇数}}k\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\sum_{k\ \text{奇数}}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\cdots\right),$$

ここで $k-1$ は $0,2,4,\ldots$ を動くからである。よって

$$\mathrm{E}(X)=\frac{\lambda\alpha}{\alpha+\beta}.$$

同様に、$Y$ は偶数 $k \geq 2$ の項を拾い（$k = 0$ の項はいずれにせよ 0 である）、このとき $k-1$ は $1, 3, 5, \ldots$ を動く：

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{k\ \text{偶数}, k\geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda\beta}{\alpha+\beta}.$$

確認として、$X + Y = U$ であるから当然 $\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \lambda = \mathrm{E}(U)$ となる。

**小問 (ii)**

> **考えてみよう** $k^2$ が $k!$ ときれいに約分できないとき、$k^2\lambda^k/k!$ の和はどう求めればよいか。

$k^2 = k(k-1) + k$ と書く。$k(k-1)$ の部分は $k!$ の因子を 2 つ約分し、$k$ の部分は 1 つ約分する。奇数の $k$ について、$k(k-1)$ の和は $k = 3$ から始まり（$k = 1$ では 0 になる）、$k - 2$ は $1, 3, 5, \ldots$ を動く：

$$\sum_{k\ \text{奇数}} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \sum_{k\ \text{奇数}, k\geq 3} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2\beta, \qquad \sum_{k\ \text{奇数}} k\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\alpha$$

（2 つ目の和は小問 (i) で求めたものである）。したがって

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda\alpha + \lambda^2\beta\right) = \frac{\lambda\alpha + \lambda^2\beta}{\alpha+\beta},$$

であり、$\mathrm{E}(X)^2$ を引くと

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\lambda\alpha + \lambda^2\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2},$$

となり、求める結果を得る。

$Y$ については偶奇（parity）が入れ替わる。偶数の $k$ について、$k(k-1)$ の和は $k = 2$ から始まり、$k - 2$ は $0, 2, 4, \ldots$ を動くので、$\lambda^2\alpha$ を与える。$k$ の和は小問 (i) と同様に $\lambda\beta$ を与える。よって

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\lambda\beta + \lambda^2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}.$$

**最後の問い。** $X + Y = U$ であるから、$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(U) = \lambda$ である。2 つの分散（variance）を足すと

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) &= \frac{\lambda(\alpha+\beta) + \lambda^2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \lambda + \lambda^2\,\frac{(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \lambda + \frac{2\lambda^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}.\end{aligned}$$

**考えてみよう** なぜ両辺が異なると予想すべきなのか。

一般に $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ である。ここでは $X$、$Y$ のうち高々一方しか 0 でない値をとらないので、常に $XY = 0$ である。よって共分散（covariance）は $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = -\lambda^2\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2$ となり、上の計算と一致する。等号が成り立つには $\lambda^2\alpha\beta = 0$ が必要である。しかし $\lambda > 0$ ならば $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \geq \lambda > 0$ であるから、$\lambda^2\alpha\beta > 0$ となる。したがって、$\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X+Y)$ となる 0 **でない** $\lambda$ **の値は存在しない**。左辺は常に真に大きい。実際、$\alpha = \cosh\lambda$、$\beta = \sinh\lambda$ であるから、その差は $\lambda^2 \sinh 2\lambda / \mathrm{e}^{2\lambda} = \frac{1}{2}\lambda^2\left(1 - \mathrm{e}^{-4\lambda}\right)$ である。

## 検算

- $\lambda \to 0$ のとき、$U$ はほとんど常に 0 か 1 であるから、$Y$ はほとんど常に 0 である。実際、$\mathrm{E}(Y) \approx \lambda^2 \to 0$ かつ $\mathrm{E}(X) \approx \lambda$ である。
- $\lambda$ が大きいとき、$\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda}$ であるから、$\mathrm{E}(X) \approx \mathrm{E}(Y) \approx \frac{1}{2}\lambda$ となる。すなわち、奇数の値と偶数の値が同程度に起こりやすくなる。
- $\lambda = 1$ のとき、ポアソン分布の確率を直接足し合わせると $\mathrm{Var}(X) \approx 0.6778$、$\mathrm{Var}(Y) \approx 0.8131$ となり、その和は $\mathrm{Var}(U) = 1$ を約 $0.4908 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-4})$ だけ上回る。どちらの公式とも一致する。

## よくある間違い

- 約分した後の偶奇を取り違える。$k$ が奇数ならば、$k-1$ は偶数（$\alpha$ を与える）、$k-2$ は奇数（$\beta$ を与える）である。
- $\mathrm{e}^{-\lambda} = 1/(\alpha+\beta)$ であることを忘れ、答えが要求された形になっていない。
- 分散が足し算できると思い込む。$X$ と $Y$ は独立（independent）とはほど遠い。$X \neq 0$ がわかれば $Y = 0$ が確定してしまう。

## STEP のその先へ

級数を偶数部分と奇数部分に分けることは、分解 $\mathrm{e}^{\lambda} = \cosh\lambda + \sinh\lambda$ にほかならない。確率母関数（probability generating function）を使えば、これは定型的な操作になる。$G(s)$ の偶数部分は $\frac{1}{2}\big(G(s) + G(-s)\big)$ である。最後に用いた共分散の恒等式は、大学の確率論の講義で最初に学ぶ道具の一つである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数と共分散の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。